

מבוא לגלים



תוכן העניינים

1.	תנועה הרמונית - מתוך פיזיקה 1	1
2.	מודים עצמיים	9
3.	אנליזת פורייה	10
4.	מבוא לגלים	19
5.	גלים רוחביים במיתר	24
6.	גלים אורכיים - גלי קול	49
7.	חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה)	59
8.	גלים דו מימדיים ומנחה גלים	68
9.	גלים אלקטרו-מגנטיים	73
10.	התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים	91
11.	תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום	108
12.	תורת הקוונטים	133
13.	תורת הקוונטים חלק 2 - כנראה שאין לכם צורך בפרק הזה לפי הסילבוס	150
14.	המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית	172

מבוא לגלים

פרק 1 - תנועה הרמונית - מתוך פיזיקה 1

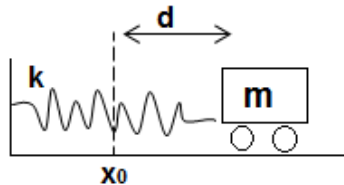
תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. בור פוטנציאל 3
3. תנועה הרמונית מרוסנת 5
4. תנועה הרמונית מאולצת 7

תנועה הרמונית פשוטה:

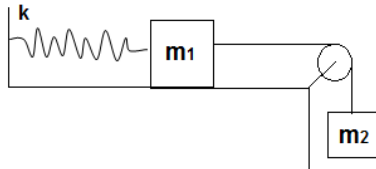
שאלות:

(1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k . מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את $x(t)$ של המסה.

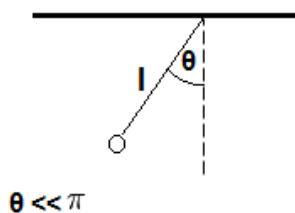
(2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M .

- מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).
- מצא את תדירות התנודה של המערכת.
- מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)



נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה. אורך החוט של המטוטלת הוא l . מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

בור פוטנציאל:

שאלות:

(1) פוטנציאל לנארד-ג'ונס

פונקציית הפוטנציאל של לנארד ג'ונס מתארת את האינטראקציה בין אטומים

$$U(r) = \varepsilon \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right] \quad \text{או מולקולות בתוך סריג והיא נתונה לפי הנוסחה:}$$

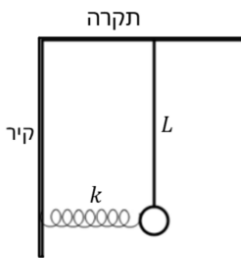
כאשר ε ו- r_0 קבועים ו- r הוא המרחק בין המולקולות.

מצא את התדירות של תנודות קטנות סביב שיווי משקל של המערכת.

ניתן להניח שמדובר בחלקיק אחד במסה m המרגיש את הפוטנציאל

מחלקיק שני במסה M הנשאר נייח ($m \ll M$).

(2) מטוטלת מתמטית וקפיץ עם אנרגיות



מטוטלת עם מסה m תלויה מהתקרה באמצעות חוט באורך L .

קושרים למסה קפיץ בעל קבוע k המחובר אופקית לקיר.

הקפיץ במצב רפוי כאשר החוט מאונך לתקרה.

מזיזים את המסה זווית קטנה θ_0 ימינה ומשחררים ממנוחה.

א. מצאו את הזווית של המסה כתלות בזמן.

ב. מהי המתיחות בחוט כאשר המוט נמצא במצב אנכי תוך

כדי תנועה.

(3) עיפרון עם מוטות בשיווי משקל

הגוף שבאיור מורכב מעיפרון בעל מסה זניחה ואורך L .

לקצה של העיפרון מחוברים שני כדורים בעלי מסה m

באמצעות מקלות דקים חסרי מסה באורך l ובזווית α .

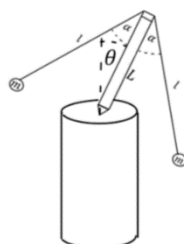
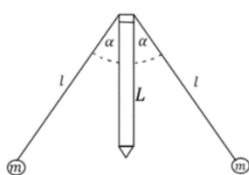
מניחים את הגוף על מעמד ומטים אותו בזווית θ במישור הדיף.

א. רשמו את האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף כתלות בזווית θ .

ב. באיזו זווית θ יהיה הגוף בשיווי משקל?

ג. מה התנאי לכך ששיווי המשקל יהיה יציב?

ד. מהו זמן המחזור של התנודות סביב נקודת שיווי המשקל?



תשובות סופיות:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{72\varepsilon}{mv_0}} \quad (1)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{mg + kL}{mL}} \cdot t\right) \quad \text{א.} \quad (2) \quad \text{ב.} \quad T = mg + (mg + kL)\theta_0^2$$

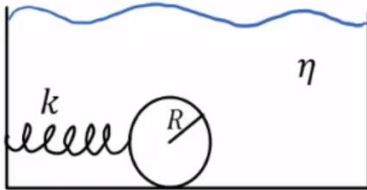
$$U = 2mg(L - l \cos \alpha) \cos \theta \quad \text{א.} \quad (3) \quad \text{ב.} \quad \theta = 0 \quad \text{ג.} \quad L < l \cos \alpha$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l \cos \alpha - L}{L^2 + l^2 - 2Ll \cos \alpha}}} \quad \text{ד.}$$

תנועה הרמונית מרוסנת:

שאלות:

(1) כדור במיכל מים



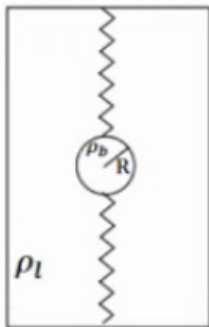
כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל. קבוע הקפיץ הוא k . בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו

הוא: $\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.

התייחס ל- m , k , η , R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור

בהנחה ש- $R < \frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

(2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.

נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,

ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים ו- η - צמיגות המים.

(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו

כוח ציפה: $F = \rho_l V g$ וכוח סטוקס: $F = -6\pi\eta R v$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.

ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?

מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.

ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

(3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.

בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

(4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה. הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי? (הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

(5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi R \eta}{m}\right)^2} \quad (1)$$

$$y_{eq} = \frac{F_b}{2K} \quad (2) \quad \text{א.} \quad \omega^* = \sqrt{\frac{2K}{m} - \left(\frac{6\pi\eta R}{2m}\right)^2} \quad \text{ב.} \quad \frac{2K}{m} = \frac{6\pi\eta R^2}{2m} \quad \text{ג.}$$

$$5\% \quad (3)$$

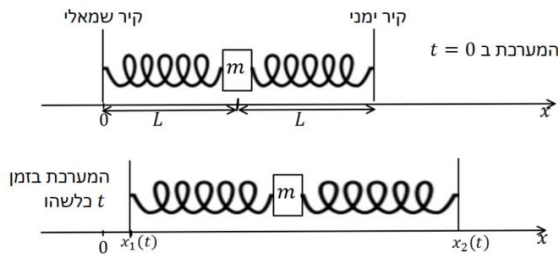
$$1.6\text{sec} \quad \text{א.} \quad \text{ב. בערך מחזור אחד.} \quad (4)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} t e^{-5\sqrt{2}t} \quad \text{ב.} \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-5t} \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{א.} \quad (5)$$

תנועה הרמונית מאולצת:

שאלות:

(1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F = -bv$. ב- $t = 0$ הקירות מתחילים לזוז. ראשית הציורים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה. מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_1(t) = d \sin(\omega t)$, $x_2(t) = 2L + 2d \sin(\omega t)$. נתונים: $d \ll L$, d, L, ω, k, b, m .

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

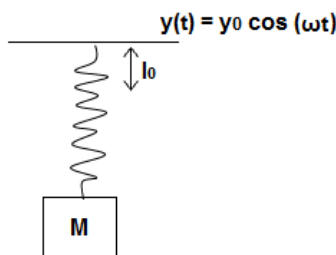
(2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך. על המסה פועל כוח גרר: $f = -bv$ וכוח מאלץ: $F(t) = d \cdot \cos(\omega t)$. מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית. הנח כי: $d \ll \sqrt{mk}$, ω, b, k, m, d נתונים וכי: $b \ll \sqrt{mk}$.

(3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y . לפי: $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$.

קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים. מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.



תשובות סופיות:

$$\omega \sim \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{ב.} \quad A(\omega) = \frac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \quad (2)$$

$$y(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \cos \omega t + y'_0 \quad (3)$$

מבוא לגלים

פרק 2 - מודים עצמיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 9

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע $2k$. מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

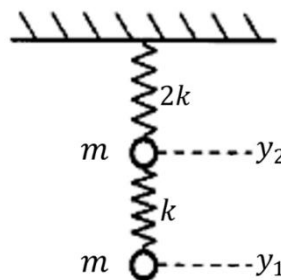
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציאלית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t = 0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0 .

מצאו את תנועת המסות כתלות בזמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.41 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.41 \end{pmatrix}. \quad \text{ג.} \quad w_{1,2} = \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}} w_0, \quad w_{3,4} = \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}} w_0. \quad \text{ב.}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63 \\ -1.52 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{w_0} \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}} w_0 t) + \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.37 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{w_0} \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}} w_0 t) \quad \text{ד.}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

מבוא לגלים

פרק 3 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 10

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f(x) g(x) dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

טור אקספוננטים :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$$

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים :

$A_n = C_n + C_{-n}$	$B_n = i(C_n - C_{-n})$
$C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n)$	$C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$

$$\frac{A_0}{2} = C_0$$

תופעת גיבס :

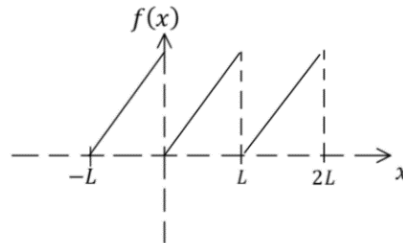
- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

שאלות

(1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור:

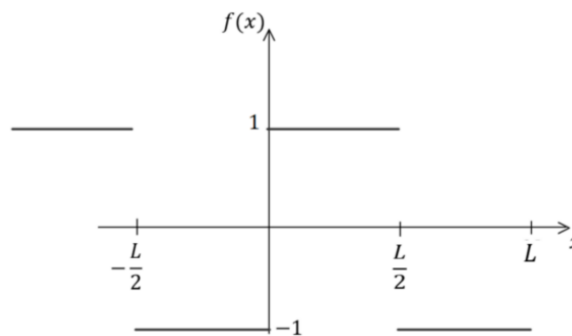
$f(x) = Ax$ כאשר $0 \leq x < L$ ובעלת מחזור L . קבוע נתון.



(2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$, בתחום $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L . ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N = 1$, $N = 3$, $N = 10$ ו- $N = 50$ עבור $L = 1$

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



(3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x, & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

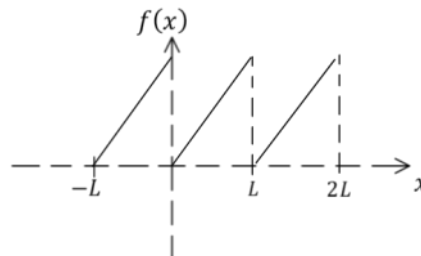
ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעיף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקציית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x) = Ax$ כאשר $0 \leq x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x$ בתחומים הבאים:

א. $[0, 2\pi]$

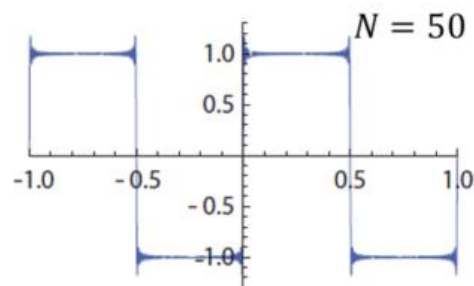
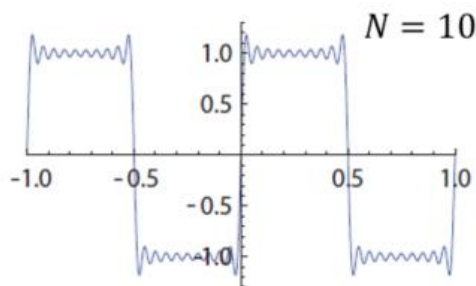
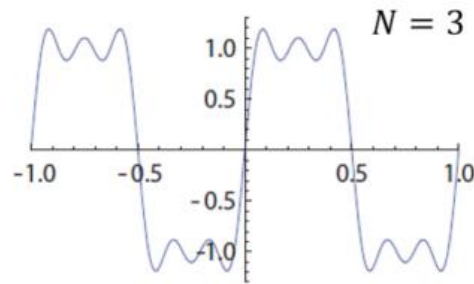
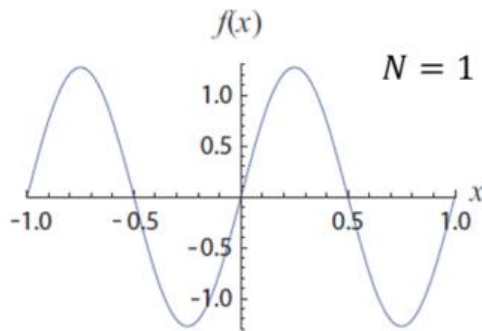
ב. $[-\pi, \pi]$

ג. $[0, 4\pi]$

תשובות סופיות

$$f(x) = \frac{AL}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{AL}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \quad (1)$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases} ; A_n = 0 \text{ לכל } n \quad (2)$$



$$f(x) = \frac{L}{4} - \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \quad (3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 n^2} \left(2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \text{ג.}$$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

$$f(x) = \frac{AL}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{iLA}{2\pi n} e^{i\frac{2\pi n}{L} x} \quad (4)$$

$$A_0 = AL, A_n = 0, B_n = -\frac{LA}{\pi n} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx) \quad (5)$$

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 2\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \sin\left(\frac{n}{2} x\right) \quad \text{ג.}$$

התמרת (טרנספורם) פורייה

רקע

התמרה (טרנספורם) פורייה

$$F(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

התמרה הפוכה

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dx$$

תכונות:

1. לינאריות : $FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$

אם $f(x) \in G$ אז $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \neq \infty$

• אם $f(x) \in G$ אז $F(k)$ רציפה

• אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F(k) = 0$, רימן - לבג

• אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$

• אם $f(x)$ אי-זוגית אז $F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$

• אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$

התמרות של פונקציות מיוחדות:

גאוסיאן

$$FT[Ae^{-\alpha x^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט



$$FT[Ae^{-\alpha|x|}] = \frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2 + k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}\right] = \frac{1}{2}e^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1] = \delta(k)$$

נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):

$$FT[f(x)e^{iCx}] = F(k - C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)] = \frac{F(k - C) + F(k + C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)] = \frac{F(k - C) - F(k + C)}{2i}$$

נוסחת הכיווץ והזזה:

$$FT[f(ax + b)] = \frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

נוסחת הנגזרת:

אם $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ו- $f(x), f'(x) \in G$:

$$FT[f'(x)] = ikF(k)$$

נוסחת המומנט:

אם $xf(x) \in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו- $i\frac{d}{dk}F(k) = FT[xf(x)]$

שאלות

(1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = Ae^{-ax}\theta(x)$$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(3) דוגמה - חלון מורחב

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -r \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}, \text{ כאשר } r > 0$$

(4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$$

(5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{-\alpha x^2}$.

(7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{d}{dt}q(t) + bq(t) = f_0 e^{-at}\theta(t)$

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

תשובות סופיות

$$\frac{A}{2\pi(a+ik)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \sin c(k) \quad (2)$$

$$\frac{\sin(rk)}{\pi k} \quad (3)$$

$$\frac{-ik}{4\alpha} e^{-\alpha(k)} \quad (4)$$

$$\frac{i}{\pi} \left(\frac{k \cos k - 1 \cdot \sin k}{k^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{e^{\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}} \left(1 - \frac{k^2}{2\alpha} \right) \quad (6)$$

$$q(t) = \frac{1}{b-a} f_0(e^{-at} - e^{-bt}) \theta(t) + Ce^{-bt} \quad (7)$$

מבוא לגלים

פרק 4 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 19

הרצאות ותרגילים – מבוא לגלים

סוגי גלים ותאור גלים

רקע:

גל - הפרעה שמתקדמת במרחב

גלים רוחביים - גלים שבהם ההפרעה היא בכיוון ניצב להתקדמות הגל (מיתר מים)

גלים אורכיים - גלים שבהם ההפרעה היא בכיוון מקביל להתקדמות הגל (קול)

תווך - החומר שבו מתקדמת ההפרעה

פונקציית הגל - פונקציה שמתארת את ההפרעה כתלות בזמן ובמרחב. פונקציית הגל צריכה להיות פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.

יש להבחין בין מהירות התקדמות הגל למהירות של החלקיקים בחומר!

אמפליטודה (משרעת) - הערך המרבי של ההפרעה בגל (בדיר"כ מסומנת באות A).

אנרגיה של גל - $E \propto A^2$

משוואת הגלים

רקע:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} : \text{משוואת הגלים במימד אחד}$$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

שאלות

1) תרגיל - קוסינוס בשלישית

האם הפונקציה $y(x,t) = A \cos^3(ax + bt)$ מהווה פתרון של משוואת הגלים? במידה וקיים תנאי, פרטו את התנאי, מצאו את מהירות הגל ואת כיוון תנועתו.

2) תרגיל - סכום של שתי פונקציות

האם הפונקציה $y(x,t) = f(x - at) + g(x + bt)$ מהווה פתרון למשוואת הגלים? במידה וקיים תנאי, פרטו את התנאי, מצאו את מהירות הגל ואת כיוון תנועתו.

(3) האם הפונקציות הבאות הן פתרון של משוואת הגלים?

א. $y(x, t) = 0.005 \sin(20x - 660t) + 0.009e^{(x+33t)}$

ב. $y(x, t) = 0.005 \sin(20x - 660t) + 0.005 \cos(x + 32t)$

(4) תרגיל - חקירת פונקציה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4}{3x^2 + 1}$.

א. שרטטו איכותית את צורת הפונקציה.

ב. רשמו ביטוי לגל בעל פרופיל זה, אשר נע בכיוון השלילי של ציר ה- x ,

במהירות $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, בהנחה שברגע $t = 0$ מתקיים $\psi(x, 0) = f(x)$.

ג. חשבו, ישירות מהביטוי שמצאתם בסעיף הקודם, היכן נמצא

המקסימום של הגל ברגע $t_1 = 4 \text{ sec}$ וברגע $t_2 = 5 \text{ sec}$.

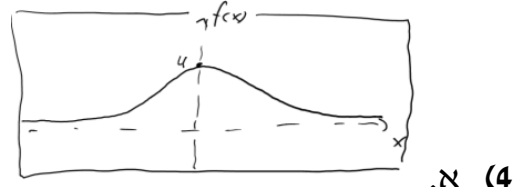
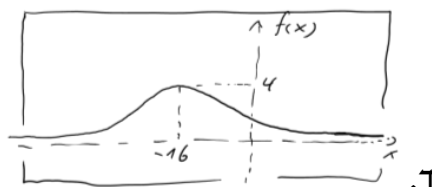
ד. שרטטו איכותית את צורת הגל ברגע $t = 2$.

תשובות סופיות

(1) $\frac{b}{a}$, בכיוון השלילי של ציר ה- x .

(2) $Y(x, t)$ מהווה פתרון רק אם $a = \pm b$ ואז מהירות הגל היא a .
לתנאים ראו בסרטון.

(3) א. כן. ב. לא.



א. (4)
ב. $4(x, t) = \frac{4}{3(x+4t)^2 + 1}$ ג. -16, -20

תכונות ותופעות בגלים

רקע:

התאבכות - סכימה של גלים שנפגשים

חזית גל - אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

גלים הרמוניים

רקע:

גל מחזורי - גל שמכיל מקטע שחוזר על עצמו

אורך הגל - אורך הקטע שחוזר, מסומן ב- λ (בדור"כ נמדד ע"י המרחק בין שיא לשיא)

זמן המחזור - הזמן שלוקח לגל לעשות מחזור שלם, מסומן ב- T , $\lambda = v \cdot T$

תדירות - מספר המחזורים בשנייה, מסומנת ב- f , $f = \frac{1}{T}$

גל הרמוני - פונקציית קוסינוס או סינוס, $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מספר הגל - k , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\omega = v \cdot k$$

גל עומד

מאפיינים:

1. נקודות צומת- נקודות שלא זזות - node
2. אין מהירות גל
3. נקודת טבור - נקודות שבהן האמפליטודה מקסימאלית - antinode
4. מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים

משוואת גל עומד היא מהצורה

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \sin(kx - (\omega t + \varphi)) + \frac{A}{2} \sin(kx + (\omega t + \varphi))$$

שאלות

(1) תרגיל - חישוב ערכים בסיסיים בגל במיתר

במיתר נע גל $y(x, t) = 2 \cos(500t - 0.2x)$.

א. חשבו את האמפליטודה, התדר הזוויתי (ω) , התדר (f) , מספר הגל (k) , אורך הגל (λ) ומהירות הגלים.

ב. באותו מיתר קיים גל $y(x, t) = 2 \sin(500t - 0.2x) + 2 \sin(500t - 0.2x + 0.6)$.
על ידי שימוש בזהות של סכום סינוסים, קבלו את הגל השקול. מה מתאר גל זה?

(2) תרגיל - חישוב תדירויות ואורכי גל של גל א"מ

אורך הגל של אור כתום הוא $\lambda = 605 \text{ nm}$.

א. כמה מחזורים של הגל ניתן להכניס לעובי של נייר $(D = 0.08 \text{ mm})$?

ב. איזה מרחק יכסו אותו מספר מחזורים שמצאתם בסעיף א, אם מדובר בגלי מיקרו בעלי תדירות של $f = 10^{10} \text{ Hz}$?

גלי מיקרו נעים במהירות האור, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

ג. מהי מהירות הקול בגוש ברזל, אם מתפשט בו גל בתדירות $f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$, עם אורך גל של $\lambda = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}$?

(3) תרגיל - סכום של N גלים עם הפרשי פאזה ומספרים מורכבים**

נתבונן ב- N גלים מהצורה $A \cos(kx - \omega t)$, כאשר בין גל לגל הפרש פאזה $\Delta\phi$, כלומר הגל ה- n הינו $A \cos(kx - \omega t + n\Delta\phi)$.

א. הראו שסכום הגלים, $\sum_{n=1}^N A \cos(kx - \omega t + n\Delta\phi)$, שקול לגל יחיד עם אותם

ערכי ω ו- k , ומצאו את האמפליטודה והפאזה שלו. היעזרו בכתוב מרוכב.

ב. עבור אילו ערכי $\Delta\phi$ מתקבלת אמפליטודה מקסימלית ומינימלית?

(4) תרגיל - סכום גלים עם הפרשי תדירויות

נתונים N גלים התלויים בזמן כך שקיים הפרש תדירות קבוע בין כל שני גלים $\delta\omega$. כלומר הגל ה- n הוא מהצורה: $A \cos(\omega_0 t + n\delta\omega t)$.

א. השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם ומצאו את סכום הגלים מ- $n = 0$ ועד $n = N - 1$.

ב. הראו שעבור $N = 2$ מתקבלת התוצאה של חיבור שני גלים שראינו בסרטון ההרצאה.

תשובות סופיות

(1) א. $A = 2m, \omega = 500 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, f = 79.6 \text{ Hz}, k = 0.2 \frac{1}{m}, \lambda = 10\pi m, v = 2500 \frac{m}{s}$

ב. $-3.3 \sin(0.4x - 1000t)$, גל סינוס עם פאזה של π בתדירות כפולה ואורך גל כפול ואמפליטודה של 3.3.

(2) א. 130. ב. $\frac{3}{9}m$. ג. $4500 \frac{m}{s}$

(3) א. אמפליטודה $\tilde{A} = A \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$; פאזה $\tilde{\phi} = \frac{N+1}{2} \Delta\phi$.

ב. האמפליטודה המקסימלית היא NA והיא מתקבלת כש- $l = 0, 1, 2$ $\Delta\ell = 2\pi l$.

האמפליטודה המינימלית היא אפס והיא מתקבלת עבור $\Delta\phi = \frac{2\pi k}{N}$,

כאשר $\frac{k}{N}$ לא שלם.

(4) א. $A \frac{\sin\left(N \frac{\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)} \cos\left(\omega_0 t + \frac{N-1}{2} \delta\omega t\right)$. ב. ראו בסרטון.

מבוא לגלים

פרק 5 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 24

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתחיות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega = v \cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = \\ &= B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = \\ &= C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים

$$\psi(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3 = A_1^*$ ו- $A_4 = A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

שאלות

(1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$. נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2\text{m}$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות). חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

(2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, במיתר מעורר גל מהצורה:

$$\psi(x, t) = 0.005 \cos(3x - 90t)$$

 חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהי במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

(3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

- נתון גל סינוס המתקדם במיתר.
- כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה- x , בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.
 - רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.
 - איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3\text{sec}$?
 - עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?
 - מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

(4) תרגיל – פונקציה ריבועית

- נתונה פונקציה $y(x, t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.
- א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.
- ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.
- ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ חשבו את מתיחותו.
- ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

(5) תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

- מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך dx , הוא $F = -b dx \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, כאשר b פרמטר נתון.
- א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).
- ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.
הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x, t) = X(x)f(t)$ זהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?
- ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x, t = 0) = a \cos(k_0 x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(2) \quad 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 0.102\text{N}; 0.45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(3) \quad \text{א. } y(x, t) = 0.006_m \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right) \quad \text{ב. } a(x, t) = 0.00096\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right)$$

ג. כאשר $x = 85_m + 50n$, מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

$$\text{ד. } t = 0.001_s - 2.5_s n$$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

$$(4) \quad \text{א. } y(x, t) = (4x + 8t)^2 + (4x - 8t)^2 \quad \text{ב. } 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ג. } 0.12\text{N} \quad \text{ד. לא.}$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{b}{T} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\text{ב. } \Gamma = \frac{b}{\rho} \quad \text{כאשר } \psi(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-\frac{\Gamma}{2}t} [\cos(\omega t) 2C \sin(\omega t)]$$

$$\text{ג. } \omega = \sqrt{\frac{k_0^2 T}{\rho} - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad \text{כאשר } \psi(x, t) = a \cos(k_0 x) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\cos(\omega t) \frac{\Gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right]$$

פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר

רקע

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [\psi(x - vt, 0) + \psi(x + vt, 0)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \dot{\psi}(x', 0) dx'$$

שאלות

1 תרגיל – גל נע שמאלה וגל במנוחה

- למיתר בעל צפיפות מסה $\rho_0 = 0.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ יש מתיחות $T = 0.8 \text{ N}$. ברגע $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x, 0) = 0.4 \sin(20x)$. במיתר נע גל בכיוון החיובי של ציר ה- x .
 א. רשמו ביטוי עבור פונקציית הגל בכל רגע, $\Psi(x, t)$.
 ב. מהם האמפליטודה, אורך הגל, מספר הגל, התדירות וזמן המחזור של הגל?
 ג. כיצד ישתנו התשובות לסעיפים א-ב, אם במקום שיהיה נתון שהגל מתקדם בכיוון החיובי, נתון שבזמן $t = 0$ המיתר נמצא במנוחה בכל מקום?

2 תרגיל – מציאת פונקציית גל מתנאי התחלה

- במיתר אינסופי מסוים, מהירות הגלים היא $15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, ברגע $t = 0$ נתון ש-
 $\Psi(x, 0) = |x|e^{-\frac{|x|}{b}}$ וכן $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = a \frac{x}{b} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$, כאשר a, b קבועים נתונים.
 מצאו את $\Psi(x, t)$.

3 תרגיל – בניית פונקציית גל

- נתון מיתר ובו מהירות הגלים היא $v = 120 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. הגל במיתר הוא
 $\Psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$. נתון גם כי $g(y) = 2f(y) + 0.001 \sin(5y)$,
 וגם שברגע $t = 0$, $\Psi(x, 0) = 0.002 \sin(5x) - 0.003x$,
 הניחו יחידות סטנדרטיות ומצאו את:
 א. פונקציית הגל בכל מיקום וזמן.
 ב. מהירות חתיכה של המיתר הנמצאת במיקום $x = 0.8 \text{ m}$,
 וברגע $t = 0.2 \text{ sec}$?



נספח: פתרון עם תנאי שפה התלויים בזמן

אם נתונה הפונקציה של הקצה כתלות בזמן (נסמנה ב $f(t)$) אז הגל שנוצר ממנה יהיה:

$$\Psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

במקרה של כוח התלוי בזמן שפועל על קצה $F_D(t)$ (ואין גל שנע בכיוון השלילי)

$$f(t) = \frac{v}{T} \int F_0(t) dt$$

(4) תרגיל – מנוע מייצר גל

צפיפות המסה של מיתר חצי אינסופי היא $\rho = 0.012 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ והמתיחות שלו היא 520 N . בקצה $x=0$ ישנו מקור גלים (מנוע) המאלץ את הנקודה הזו לנוע באופן $b(1 - e^{-\alpha t^2})$ כאשר $b = 5 \text{ cm}$ ו- α קבוע מסוים. ברגע $t = 0$ המיתר נמצא בשיווי משקל בכל מקום והמקור מתחיל לפעול. המקור יוצר גל, הנע בכיוון החיובי של ציר ה- x . נתון שברגע $t = 0.2 \text{ sec}$ סטיית המיתר משיווי משקל בנקודה $x = 15 \text{ m}$ היא 4 cm .

- קבלו ביטוי לפונקציית הגל בכל רגע ומקום, $\Psi(x, t)$.
- חשבו את ערכו המספרי של הקבוע α .
- מצאו ביטוי עבור הכוח המפעיל את המנוע.
- חשבו את $\Psi(x, t = 0.1 \text{ sec})$ ושרטטו את הפונקציה.

(5) תרגיל - עוד מנוע

מיתר חצי אינסופי בעל צפיפות מסה $\rho = 0.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ מוחזק במתיחות של 270 N . קצה המיתר נמצא ב $x=0$, בו יש מנוע המפעיל את הכוח הבא:

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2t^2(t-1)(t-4) & 0 \leq t \leq 4 \text{ s} \\ 0 & t \geq 4 \text{ s} \end{cases}$$

- רשמו ביטוי עבור פונקציית הגל בכל מקום ובכל רגע. הניחו שהמיתר נמצא במנוחה ובשיווי משקל ב $t = 0$.
- שרטטו את פונקציית הגל ברגעים $t = 6, 3 \text{ sec}$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \psi(x, t) = 0.4 \sin(20(x - 2t)) \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad A = 0.4 \text{ m}, \quad \lambda = \frac{\pi}{10} \text{ m}, \quad K = 20 \frac{1}{\text{m}}, \quad f = \frac{20}{\pi} \text{ Hz}, \quad T = \frac{\pi}{20} \text{ sec}$$

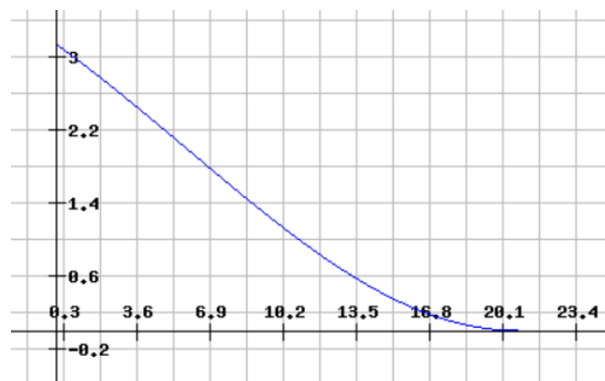
$$\text{ג.} \quad \psi(x, t) = 0.4 \sin(20x) \cos(40t) \quad \text{אין שינוי בפרמטרים של סעיף ב.}$$

$$(2) \quad \psi(x, t) = \frac{1}{2} \left[|x - 15t| e^{-\frac{|x-15t|}{b}} + |x + 15t| e^{-\frac{|x+15t|}{b}} \right] - \frac{ab}{60} \left[e^{-\left(\frac{x+15t}{b}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x-15t}{b}\right)^2} \right]$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad \psi(x, t) = 0.001 \sin(5(x - 120t)) + 0.001(x - 120t) + 0.001 \sin(5(x - 120t)) + 0.002(x - 120t) \quad \text{ב.} \quad 0.642 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(4) \quad \text{א.} \quad \psi(x, t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{x}{v} \\ b \left(1 - e^{-\alpha \left(t - \frac{x}{v} \right)^2} \right) & t \geq \frac{x}{v} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad 98.4 \frac{1}{\text{sec}^2}$$

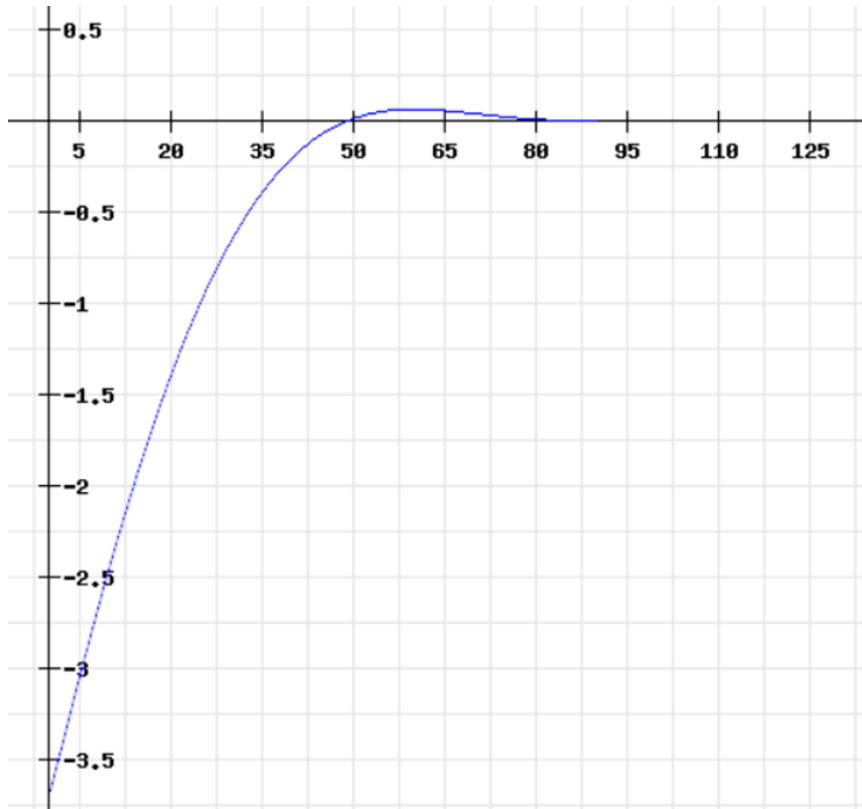
$$\text{ג.} \quad F(t) = \frac{2\alpha Tb}{v} t e^{-\alpha t^2} \quad \text{ד.} \quad \psi(x, 0.1) = 5 \text{ cm} \left(1 - e^{-98.4 \left(0.1 - \frac{x}{208} \right)^2} \right)$$



שרטוט:

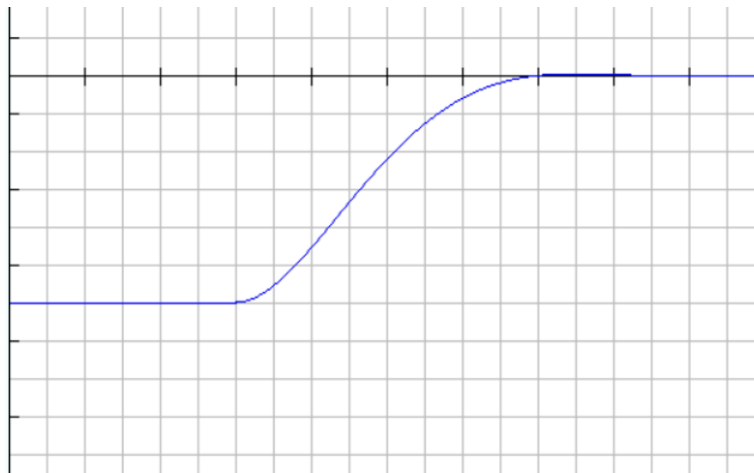
$$(5) \quad \text{א.} \quad \psi(x, t) = \frac{1}{9} \begin{cases} 0 & t - \frac{x}{30} \leq 0 \\ \frac{2}{5} \left(t - \frac{x}{30} \right)^5 - \frac{5}{2} \left(t - \frac{x}{30} \right)^4 + \frac{8}{3} \left(t - \frac{x}{30} \right)^3 & 0 \leq t - \frac{x}{30} < 4 \\ 1220 & t - \frac{x}{30} \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{ב.} \quad \psi(x, 3) = \frac{1}{9} \begin{cases} 0 & 90 \leq x \\ \frac{2}{5} \left(3 - \frac{x}{30} \right)^5 - \frac{5}{2} \left(3 - \frac{x}{30} \right)^4 + \frac{8}{3} \left(3 - \frac{x}{30} \right)^3 & 0 \leq x < 90 \end{cases}$$



שרטוט:

$$\psi(x, 6) = \frac{1}{9} \begin{cases} 0 & 180 \leq x \\ \frac{2}{5} \left(6 - \frac{x}{30}\right)^5 - \frac{5}{2} \left(6 - \frac{x}{30}\right)^4 + \frac{8}{3} \left(6 - \frac{x}{30}\right)^3 & 60 \leq x \leq 180 \end{cases}$$



שרטוט:

החזרה והעברה

רקע

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$.

$$1. \psi_L(0, t) = \psi_R(0, t) \quad \text{רציפות הפונקציה}$$

$$2. F_L = F_R \quad \text{רציפות הכוח}$$

אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת

$$\left. \frac{\partial \psi_L}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$\psi_r(x, t) = r\psi(-x, t)$$

$$\psi_t(x, t) = t\psi\left(\frac{v_1}{v_2}x, t\right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

מקדם החזרה

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}$$

מקדם העברה

$$t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}$$

הערה: את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

שאלות

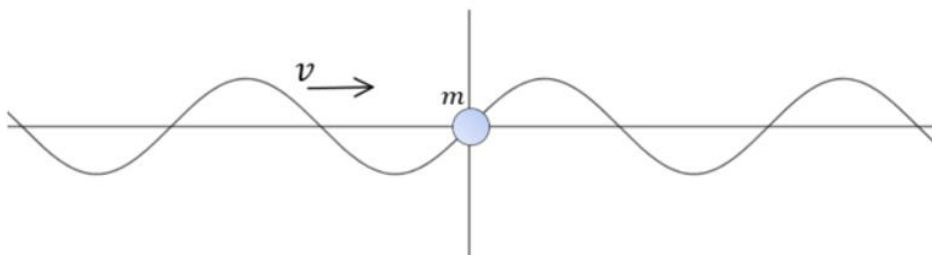
(1) תרגיל – ביטול של הגל העובר או החוזר

- מיתר מורכב משני חלקים בעלי צפיפויות שונות ρ_1 ו- ρ_2 ומתיחות אחידה T .
 גל מהצורה $\Psi_A(x, t) = |A| \cos(k_1 x - \omega t)$ מתקדם בכיוון החיובי ממיתר 1
 לכיוון מיתר 2. נתונים: $\rho_2, \rho_1, k_1, T, A, \omega$.
 א. מצאו את הביטוי עבור הגל המועבר והגל המוחזר באמצעות נתוני השאלה.
 ב. נניח עתה, כי בנוסף ל- Ψ_A שולחים גל נוסף ממיתר 2 לכיוון מיתר 1:
 $\Psi_D(x, t) = |D| \cos(-k'_2 x - \omega' t + \varphi)$. נתון כי $\rho_2 < \rho_1$.
 מצאו את $D, k'_2, \omega', \varphi$, כך שלאחר המעבר של הגלים בין המיתרים, במיתר 2 יהיה רק גל הנוסע שמאלה. מהם התנאים לכך שבמיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה?
 ג. האם ניתן למצוא תנאי, עבורו בו-זמנית במיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה ובמיתר 2 רק גל הנוסע שמאלה? נמקו.

(2) תרגיל - החזרה והעברה ממסה על מיתר

- חרוז קטן בעל מסה m נמצא על מיתר מתוח בעל מתיחות אחידה.
 גל המתקדם משמאל במיתר מזיז את החרוז בתנועה אנכית בלבד.
 צפיפות המסה ליחידת אורך של המיתר היא ρ ומהירות הגלים במיתר היא v .
 א. הגדירו את ראשית הצירים במיקום החרוז ורשמו פונקציית גל כללית עבור המיתר משמאל ומימין לחרוז. השתמשו במספרים מורכבים.
 מהם תנאי השפה של פונקציית הגל בנקודה בה נמצא החרוז?
 נסמן ב-A את אמפליטודת הגל הפוגע, ב-B את אמפליטודת הגל המוחזר וב-C את אמפליטודת הגל העובר.

ב. הראו כי: $\frac{B}{A} = \frac{iQ}{1-iQ}$ ו- $\frac{C}{A} = \frac{1}{1-iQ}$, כאשר: $Q = \frac{m\omega}{2\rho v}$.



תשובות סופיות

$$\psi_r(x, t) = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} |A| \cos(k_1 x + \omega t)$$

$$\psi_t(x, t) = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} |A| \cos(k_2 x + \omega t), \quad k_2 = k_1 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \text{א. (1)}$$

$$k_2 = k_1', \quad w = w', \quad \phi = 0$$

$$|D| = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} |A| \quad \text{ב. שמאלה:}$$

$$k_2 = k_1', \quad w = w', \quad \phi = \pi$$

$$|D| = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{\rho_2}} |A| \quad \text{ימינה:}$$

ג. לא, כי הפאזה בכל אחד צריכה להיות שונה.

$$T \left(\left. \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial \psi_L}{\partial x} \right|_{x=0} \right) = m \ddot{\psi}_L(x=0, t), \quad \psi_L(x=0, t) = \psi_R(x=0, t) \quad \text{א. (2)}$$

ב. הוכחה בסרטון.

עכבה

רקע

העכבה, נקראת גם אימפדנס (impedance), מסומנת באות Z , ונוסחתה

$$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{V}$$

T – מתיחות

V – מהירות הגל

$$|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y – הכוח על אלמנט מסה

$V_y(t)$ – מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2:

$$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \text{ מקדם החזרה}$$

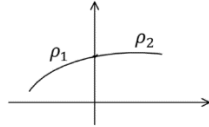
$$t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \text{ מקדם העברה}$$

תאום עכבות: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ו- } r = 0$

שאלות

1) תרגיל – מיתר עם שתי צפיפויות ושני גלים

שני מיתרים מאוד ארוכים בעלי צפיפויות מסה שונות ρ_1 ו- ρ_2 מחוברים בנקודה $x=0$ ויוצרים מיתר אחד ארוך.



המתיחות במיתר היא אחידה (כלומר לשני החלקים אותה מתיחות T)

שני גלים מגיעים לעבר נקודת האי רציפות: גל עם אמפליטודה A מגיע מצד ימין וגל עם אמפליטודה $3A$ מגיע מצד שמאל. שני הגלים בעלי אותה תדירות זוויתית ואין ביניהם הפרש פאזה קבוע.

- א. רשמו ביטוי לפונקציית הגל בכל חלק של המיתר באמצעות מספרים מורכבים. הסבירו עבור כל איבר בפונקציה איזה גל הוא מתאר.
- ב. רשמו את תנאי השפה שהפונקציות צריכות לקיים בנקודת אי הרציפות.
- ג. השתמשו בתנאי השפה ובטאו את אמפליטודות כל הגלים במיתר, במונחים של האמפליטודה A ועכבות המיתר.
- ד. חשבו שוב את האמפליטודות, הפעם באמצעות מקדמי העברה והחזרה.

תשובות סופיות

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= 3Ae^{i(k_1x - \omega t)} + Be^{-i(k_1x - \omega t)} \\ \psi_2(x, t) &= Ce^{i(k_2x - \omega t)} + Ae^{-i(k_2x - \omega t)}\end{aligned}\quad \text{א. (1)}$$

$3A$ – ימינה ; B – שמאלה ; C – ימינה ; A – שמאלה.

$$\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t) \quad \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|_{x=0} \quad \text{ב.}$$

$$B = \frac{3z_1 - z_2}{z_1 + z_2} A \quad C = \frac{5z_1 + z_2}{z_1 + z_2} A \quad \text{ג.}$$

ד. הוכחה בסרטון.

אנרגיה הספק ותנע

רקע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר

$$\varepsilon(x, t) = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \rho v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 |A|^2$$

הספק רגעי בנקודה - כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני כל יחידת זמן

$$P^\pm = \pm Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \pm v \varepsilon(x, t)$$

$P^\pm$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן

$$\bar{P}^\pm = \pm \frac{1}{2} Z \omega^2 |A|^2$$

מקדם ההחזרה של האנרגיה

$$R = \frac{P_1^-}{P_1^+} = r^2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2$$

מקדם ההעברה של האנרגיה

$$T = \frac{P_2^+}{P_1^+} = \frac{z_2}{z_1} t^2 = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}$$

$$R + T = 1$$

התנע הוא אפס

שאלות

(1) תרגיל - חישובים בפגיעה בתווך

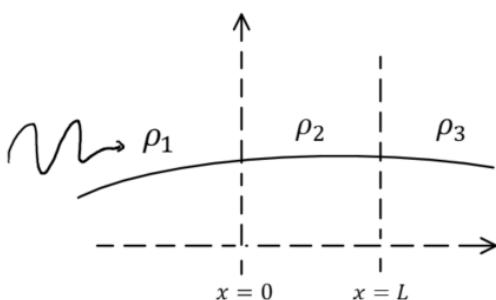
- גל סינוס נע ימינה במיתר מסוים בו מהירות הגל היא v_1 .
 צורת הגל היא $\Psi_i(x, t) = 1.4 \text{ mm} \cdot \sin(kx - 200t)$.
 הגל מגיע לצומת בו צפיפות המיתר משתנה (המתיחות נשארת קבועה), כך
 שבחלק הימני מהירות הגל היא $v_2 = 5v_1$.
 בהינתן שההספק הממוצע של הגל הפוגע הוא 60 W ,
 א. מהם האימפדנסים של שני חלקי המיתר?
 ב. מהו ההספק הממוצע של הגל העובר והגל החוזר?
 ג. מהי האמפליטודה של הגל העובר ושל הגל החוזר?

(2) שינוי בהספק כתוצאה משינוי פרמטרים

- נתון מיתר מתוח בעל צפיפות מסה $\rho = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ ומתיחות $T = 50 \text{ N}$.
 א. מהו ההספק הממוצע שצריך לספק למיתר, על מנת לייצר גל סינוס בעל
 תדירות $f = 40 \text{ Hz}$ ואמפליטודה של $A = 4 \text{ mm}$?
 ב. פי כמה ישתנה ההספק של הגל אם:
 1. נכפיל את אורך החבל?
 2. נכפיל את האמפליטודה ונקטין את התדירות פי 2?
 3. נקפל את החבל לשניים ונשתמש בחבל הכפול כחבל החדש?

(3) מיתר עם 3 חלקים

מיתר מורכב משלושה חלקים בעלי צפיפות מסה שונה, כפי שמופיע באיור
 להלן. גל מגיע מכיוון שמאל T (המתיחות של המיתר) וזהה בשלושת החלקים.



- א. רשמו ביטוי עבור חמשת הגלים
 הרלוונטיים בשאלה. עבדו בצורה
 מורכבת.
 ב. מהם תנאי השפה בבעיה?
 ג. רשמו את היחס בין אמפליטודת הגל
 העובר לאמפליטודת הגל הפוגע.
 ד. רשמו ביטוי ליחס בין ההספק של הגל
 העובר להספק של הגל הפוגע.
 ה. מה משמעות הדרישה $-1 = \frac{P_3}{P_1}$? הראו שעל מנת לקיים דרישה זו צריך
 להתקיים $z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$ ו- $L = \frac{\lambda}{4}$, כאשר λ הוא אורך הגל באזור האמצעי.

(4) תרגיל - חישוב אמפליטודה בתיאום עכבות

מיתר בעל צפיפות מסה ρ_1 מחובר למיתר בעל צפיפות מסה ρ_2 באמצעות מיתר נוסף שצפיפות המסה שלו משתנה באופן רציף מ- ρ_1 ל- ρ_2 . במקרה כזה לא תתקיים החזרה אם אורך הגל קטן ביחס לקצב השינוי בצפיפות המסה. חשבו תחת הנחה זו מה היחס בין האמפליטודה של הגל העובר לגל הפוגע? הניחו מתיחות אחידה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } z_1 = 1531 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}, \quad z_2 = 506 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad \text{ב. } \bar{P}_R = 15.6 \text{W}, \quad \bar{P}_T = 44.4 \text{W}$$

$$\text{ג. } B = 0.71 \text{mm} \quad C = 2.1 \text{mm}$$

$$(2) \quad \text{א. } 0.5 \text{W} \quad \text{ב.1. לא ישתנה.} \quad \text{ב.2. לא ישתנה.} \quad \text{ב.3. יגדל פי } \sqrt{2}.$$

$$(3) \quad \text{א. } \psi_1(x, t) = Ae^{i(k_1x - \omega t)} + Be^{-i(k_1x + \omega t)} \quad \psi_2(x, t) = Ce^{i(k_2x - \omega t)} + De^{-i(k_2x + \omega t)}$$

$$\psi_3(x, t) = Ee^{i(k_3x - \omega t)}$$

$$\text{ב. } \psi_1(0, t) = \psi_2(0, t) \quad T_1 \left. \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = T_2 \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$\psi_2(2, t) = \psi_3(2, t) \quad T_2 \left. \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|_{x=L} = T_3 \left. \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right|_{x=L}$$

$$\text{ג. } \frac{4z_2z_1e^{i(k_2-k_3)L}}{\left[(z_1+z_2)(z_2+z_3) - (z_2-z_1)(z_2-z_3)e^{i2k_2L} \right]}$$

$$\text{ד. } \frac{16z_2^2z_1z_3}{\left| (z_1+z_2)(z_2+z_3) - (z_2-z_1)(z_2-z_3)e^{i2k_2L} \right|^2}$$

ה. שכל האנרגיה של הגל הפוגע עוברת לגל העובר.

$$(4) \quad \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

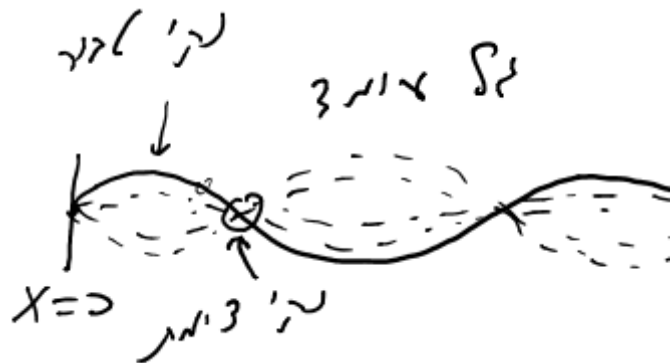
גלים עומדים

רקע

מיתר חצי אינסופיקצה קשור

$$\Psi(x=0, t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Psi(x, t) = C \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

קצה חופשי

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \Psi(x, t) = C \cos(kx) \cos(\omega t + \varphi)$$

מיתר סופימיתר סופי עם 2 קצוות קשורות

$$\Psi(x=0, t) = \Psi(x=L, t) = 0$$

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad f_n = \frac{vn}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$



$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

מיתר סופי עם קצה קשור וקצה חופשי

$$\Psi(x=0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

$$k_n = \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{\left(n + \frac{1}{2} \right)}$$

$$f_n = \frac{v}{2L} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

$$k_n = \frac{\pi n}{L} \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{vn}{2L}$$

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

פתרון באמצעות טור פוריה :

$$\Psi(x, t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)] [C_n \sin(\omega_n t) + D_n \cos(\omega_n t)]$$

שאלות

(1) תרגיל – גל פוגע וגל חוזר כביטוי של שני גלים עומדים

הראו כי הגל $\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + rA \cos(\omega t + kx)$, כאשר r קבוע כלשהו, ניתן לביטוי כסופרפוזיציה של שני גלים עומדים: $\Psi(x, t) = A(1 + r) \cos(\omega t) \cos(kx) + A(1 - r) \sin(\omega t) \sin(kx)$

(2) תרגיל - מיתר פלדה בפסנתר

מיתר פסנתר מיוצר מפלדה בעלת צפיפות מסה ליחידת נפח $\rho = 4800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ רדיוס המיתר הוא r , היצרן ממליץ להפעיל את המיתר תחת לחץ (כוח ליחידת שטח חתך) של $1.3 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

א. הראו שמהירות הגלים במיתר אינה תלויה ברדיוס שלו, וחשבו אותה.

ב. מה צריך להיות אורך המיתר כדי שישמיע את הצליל 'לה', שתדירותו 440Hz? כמנגנים במיתר בד"כ שומעים את התדירות הבסיסית.

ג. מגדילים את המתיחות פי α ללא שינוי באורך המיתר, מה צריכה להיות α כדי להעלות את תדירות המיתר פי 1.2?

(3) תרגיל – קירות בחצי ומינוס חצי L

מיתר באורך L קשור בשני צדדיו לקיר כאשר קצוות המיתר הקשורים לקיר נמצאים ב $x=L/2$ וב $x=-L/2$. נתון כי בזמן $t = 0$ המיתר כולו בשיווי משקל.

א. הציבו את תנאי השפה בפתרון של משוואת הגלים ומצאו את הקבועים המתאימים.

שימו לב כי אתם אמורים לקבל פתרון שונה ל n זוגי ול n אי-זוגי.

ב. שרטטו את ארבעת הפתרונות הראשונים, והשוו את התוצאה למה שמתקבל כאשר פותרים את הבעיה עבור קיר שמאלי ב- $x = 0$ וקיר ימני ב- $x = L$.

ג. רשמו פתרון כללי לבעיה על ידי שימוש בעקרון הסופרפוזיציה.

4 תרגיל - מודל של פסנתר

הצליל בפסנתר נוצר על ידי מכה של פטיש במיתר הקשור בשתי קצותיו. ברגע ההקשה ($t = 0$) המיתר אופקי ומהירותו במיקום הפגיעה היא v_0 . אורך המיתר הוא L . מרכז הפגיעה של הפטיש היא בנקודה $x = \frac{L}{2}$ כאשר אורך המגע של הפטיש עם המיתר הוא a .

א. מהם תנאי השפה בבעיה? הגדירו את ראשית הצירים בקצה אחד של המיתר.

ב. מהי צורת המיתר ברגע הפגיעה ($\Psi(x, 0)$)?

ג. רשמו את מהירות כל אלמנט של המיתר ברגע פגיעה.

ד. מצאו את $\Psi(x, t)$. ניתן להניח כי המתוחות וצפיפות המסה במיתר נתונות.

5 תרגיל - מיתר מכופף לפרבולה ומשוחרר ממנוחה

מיתר בעל אורך l קשור בשני קצותיו. ברגע $t = 0$ המיתר נמצא במנוחה, ומכופף כך שצורתו היא $\Psi(x, 0) = x(l - x)$. $x = 0$ הוא הקצה השמאלי של המיתר. מצאו את פונקציית הגל של המיתר כתלות בזמן. הניחו שהמתוחות והצפיפות ידועים.

6 תרגיל - חישוב אנרגיה של מיתר

נתון מיתר באורך $l = 2 \text{ m}$, שהעכבה שלו היא $30 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$, והמתוחות שלו היא .

$$\Psi(x, t) = 2000 N \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-3} \frac{2^{-n}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos(\omega_n t)$$

א. האם המיתר מקובע בשני קצותיו, פתוח בשני קצותיו או פתוח בקצה

אחד ומקובע בקצה השני? נמקו. הניחו כי הקצה של המיתר ב $x = 0$

ב. האם מהנתון ניתן לדעת, בלי לחשב, את המהירות החומרית ברגע $t = 0$?

ג. חשבו את האנרגיה הכוללת של המיתר.

7 תרגיל – מושכים מרכז של מיתר ומשחררים

נתון מיתר באורך l ובמתוחות T , ששני קצותיו קשורים. מזזים את אמצע המיתר מרחק a משיווי המשקל ומשחררים ממנוחה.

א. הראו כי בזמן $t = 0$ למיתר אנרגיה $\frac{2Ta^2}{l}$ בהנחה שהמתוחות לא משתנה.

ב. מצאו את פונקציית הגל של המיתר כתלות במיקום ובזמן.

ג. הראו ששלושת ההרמוניות בעלות התדירות הנמוכה ביותר מכילות

93.3% מהאנרגיה כשהמיתר משוחרר.

ד. מהי האנרגיה של המיתר ב $t = 3 \text{ sec}$?

(8) תרגיל - מיתר מחובר בקצה לקפיץ

מיתר באורך L קשור בנקודה $x = 0$ ובקצה $x = L$ מחובר לקפיץ אנכי בעל קבוע קפיץ λ . הקפיץ יכול לנוע בכיוון אנכי בלבד והוא רפוי כאשר המיתר אופקי. מתוחות המיתר היא T .

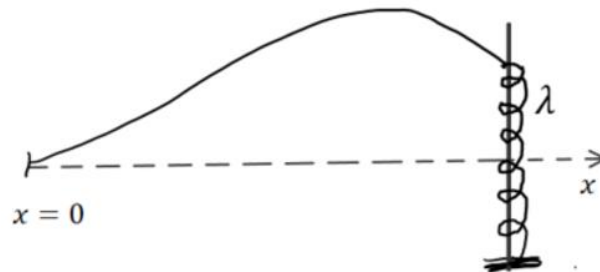
א. רשמו תנאי שפה למיתר והראו כי המשוואה ממנה ניתן למצא את

$$\tan(x) = -\alpha x \quad \text{כאשר} \quad \alpha = \frac{T}{\lambda L}, \quad x = kL$$

ב. מה התוצאה במקרה $\alpha \gg 1$ ובמקרה $\alpha \ll 1$? מה המשמעות הפיזיקאלית של כל מקרה?

ג. שרטטו פתרון גרפי עבור $\alpha = 1$ וסמנו את שלושת נקודות הפתרון הראשונות מהן מקבלים את שלושת אופני התנודה הראשונים.

ד. שרטטו את שני אופני התנודה הראשונים שקיבלתם בסעיף ג.



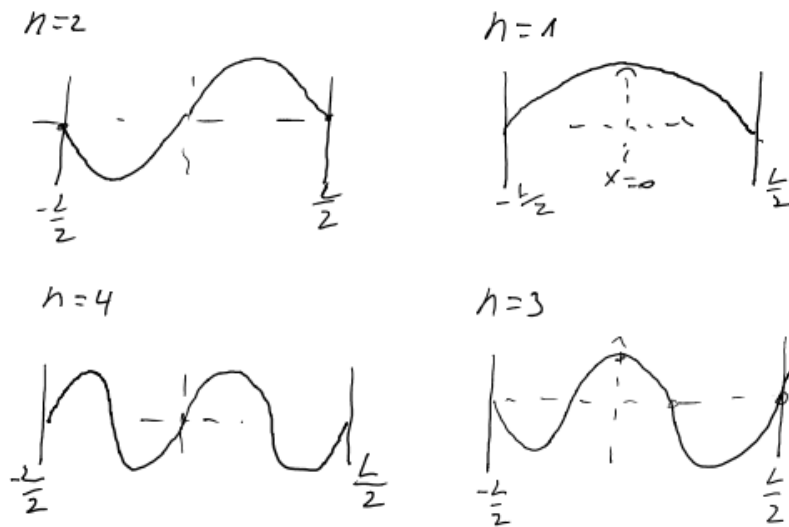
תשובות סופיות

(1) הוכחה בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } 520 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ב. } 59 \text{ cm} \quad \text{ג. } 1.44$$

$$(3) \quad \psi(x, t) = \begin{cases} A_n \sin k_n x \sin \omega_n t & n = \text{even} \\ B_n \cos k_n x \sin \omega_n t & n = \text{odd} \end{cases}, \quad k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = v \cdot k_n$$

ב.



$$\psi(x, t) = \sum_{n=2, \text{even}}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} B_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) \quad \text{ג.}$$

$$\text{כאשר } k_n = \frac{\pi n}{L}, \omega_n = v k_n$$

$$(4) \quad \text{א. } \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad \text{ב. } \psi(x, 0) = 0$$

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} v_0 & \frac{L-a}{2} \leq x \leq \frac{L+a}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_0 L}{\pi^2 n^2} \sqrt{\frac{e}{T}} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n a}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\pi n}{L} t\right) \quad \text{ד.}$$

$$(5) \quad \psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t), \quad \text{כאשר } \omega_n = v k_n, \quad k_n = \frac{\pi n}{\ell}$$

$$D_n = \begin{cases} \frac{8\ell^2}{(\pi n)^3} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases} \quad \text{וכן}$$

$$(6) \quad \text{א. הקצוות קשורים. ב. כן. ג. } 8.25 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

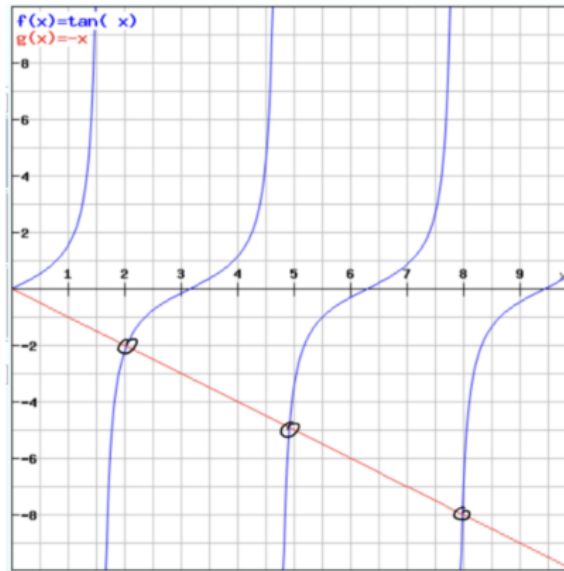
$$(7) \quad \text{א. הוכחה בסרטון. ג. הוכחה בסרטון. ד. } \frac{2Ta^2}{l}$$

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k_n, \quad A_n = \frac{8a}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad k_2 = \frac{\pi n}{\ell} \quad \text{ב.}$$

8 א. הוכחה בסרטון.

ב. במקרה $1 \gg \alpha$, $K_n = \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2} \right)$, קיבלנו K_n של קצה חופשי.

במקרה $1 \ll \alpha$, $K_n = \frac{\pi n}{L}$, קיבלנו K_n של קצה קשור.



ג.

ד.

פתרון באמצעות התמרת (טרנספורם) פורייה

רקע

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(k(x+vt))} + B(k) e^{i(k(x-vt))} dk$$

$$A(k) = \frac{1}{2} \left(FT[\psi(x, 0)] + \frac{1}{ivk} FT[\dot{\psi}(x, t=0)] \right)$$

$$B(k) = \frac{1}{2} \left(FT[\psi(x, 0)] - \frac{1}{ivk} FT[\dot{\psi}(x, t=0)] \right)$$

שאלות

1 תרגיל - תנאי התחלה הרמוניים

נתון מיתר אינסופי המקיים את משוואת הגלים. ברגע $t = 0$ המערכת

מקיימת: $\psi(x, 0) = a \cos(k_0 x)$ וכן $\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)|_{t=0} = a \omega_0 \cos(k_0 x + \varphi)$ כאשר $\omega_0 = vk_0$ ו- a, k_0, v, φ קבועים נתונים.

א. מצאו את $\psi(x, t)$ לכל $t > 0$ באמצעות התמרת פורייה.

ב. כתבו את הפתרון במפורש עבור הערכים $\varphi = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, והראו שבאחד

המקרים מתקבל גל שנע ימינה, ועבור המקרה השני מתקבל גל שנע שמאלה.

מה קורה עבור $\varphi = 0$?

תשובות סופיות

$$1 \text{ א. } \psi(x, t) = a [\cos(k_0 x) \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) \cos(k_0 x \phi)]$$

ב. עבור $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\psi(x, t) = a \cos(k_0 x + \omega_0 t)$, גל נע שמאלה,

עבור $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $\psi(x, t) = a \cos(k_0 x - \omega_0 t)$, גל נע ימינה,

עבור $\phi = 0$, $\psi(x, t) = a \cos(k_0 x) [\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)]$, גל עומד.

מבוא לגלים

פרק 6 - גלים אורכיים-גלי קול

תוכן העניינים

49	1. גלי קול בצינור
56	2. אפקט דופלר

גלי קול בצינור

רקע

גל אורכי - תנועת המולקולות היא בכיוון ההתקדמות של הגל

$\psi(x, t)$ - פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משיווי משקל. x מציין את מיקום המולקולות בשיווי משקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.

$\psi_p(x, t)$ - פונקציית הלחץ העודף access pressure

$\Delta\rho(x, t)$ - פונקציית השינוי בצפיפות

כאשר פונקציית ההעתק בנקודת צומת פונקציית הצפיפות/ לחץ בנקודת טבור ולהפך

הקשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma P_0}\psi_p$$

P_0 - הלחץ בשיווי משקל

γ - קבוע הקשור לסוג הגז מתוך משוואת הגז בתהליך אדיאבטי

מקדם האלסטיות של הגז $B_a = \gamma P_0$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

משוואת הגלים

מהירות הגלים - מהירות הקול
(לפעמים גם כתובה באות c)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

באוויר בתנאים סטנדרטיים :

$$v \approx 340 \text{ m/s}$$

אותה המשוואה מתקיימת גם עבור ψ_p ו- $\Delta\rho$

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

הקשר בין הצפיפות
לפונקציית ההעתק

עכבה של גל קול מישורי ליחידת שטח

$$\frac{Z}{A} = \rho_0 v$$

ρ_0 - צפיפות המסה בשיווי משקל

A - שטח החתך של הצינור

v - מהירות הקול בחומר

אנרגיה הכוללת ליחידת אורך

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} A \rho_0 \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 \right] = A \rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2$$

השוויון האחרון נכון רק עבור גלים נעים

אנרגיה ממוצעת בזמן

$$\bar{U}_{dx} = \bar{E}_{kdx} = \frac{1}{4} \rho_0 A \omega^2 \psi_{max}^2$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho_0 A \omega^2 \psi_{max}^2$$

ψ_{max} - האמפליטודה של פונקציית ההעתק - קבוע

ω - התדריות הזוויתית

הספק של גל קול - כמה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן

$$P(x, t) = \pm v \varepsilon(x, t) \quad \text{הספק של גל נע}$$

כאשר הפלוס/מינוס הם עבור גל שנע בכיוון החיובי/שלילי בהתאמה
(לא לבלבל עם P של לחץ)

עוצמה של הגל - ההספק ליחידת שטח

$$I(x, t) = \frac{|P(x, t)|}{A} = v \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2} v \rho_0 \omega^2 \psi_{max}^2$$

מדידת עוצמה בסולם לוגריתמי

$$I_a = I_0 \cdot 10^a$$

a - היא העוצמה ב B (בל)

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

$$1B = 10 \text{ dB} \quad (\text{זה דציבל})$$

עוצמה בגל כדורי

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

P – ההספק הכולל של הגל (אינו תלוי במרחק)

שאלות

(1) שיעור מעורר בחלל

אסטרונאוט הנמצא במעבורת חלל יצא מהמעברות לבצע תיקון חיצוני. האסטרונאוט לקח איתו שיעור מעורר וכיוון אותו לצלצל בשעה שבע בערב, כך שיספיק לחזור לארוחת הערב בתוך המעבורת. האסטרונאוט הניח את השעון לידו בזמן שהוא מבצע את התיקון. האם האסטרונאוט ישמע את השעון מצלצל? רמז: בחלל אין אוויר.

(2) דוגמה - מצאו פונקציית גל מנתונים על צפיפות

גל קול הרמוני נע בכיוון החיובי. האמפליטודה של השינוי בצפיפות האוויר של הגל היא $A_{\Delta\rho} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^3$. התדירות של הגל היא 500Hz . נתון גם כי $\Delta\rho(0,0) = 0$, $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ו- $v = 340 \text{ m/s}$. מצאו מהי ההסטה משיווי משקל של מולקולות האוויר הנמצאות ב- $x = 15\text{cm}$, בזמן $t = 0$.

(3) תרגיל - כמה אנרגיה עברה בשעה

העוצמה של גל קול מישורי היא $I = 1.4 \mu \text{ W/cm}^2$. חיישן בעל שטח חתך $A = 3.6 \text{ cm}^2$ קולט את הגל. כמה אנרגיה קיבל החיישן כל שעה?

(4) תרגיל - פי כמה גדלה העוצמה עבור שינוי של דציבל אחד

ראינו כי גידול של העוצמה ב-1B הוא גידול של פי 10 ביחידות של W/m^2 . חשבו פי כמה גדלה העוצמה ביחידות של W/m^2 עבור גידול של 1dB.

(5) תרגיל - חישוב הפרעה בלחץ מעוצמה ממוצעת

נתון גל קול מישורי בתדירות 12kHz . העוצמה הממוצעת בזמן של הגל היא $\bar{I} = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$. הגל מתקדם בתווך בעל: $v = 340 \text{ m/sec}$, $\gamma = 1.48$, $P_0 = 0.7 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$. מצאו ביטוי לשינוי בלחץ כתלות במיקום ובזמן, אם ידוע שהגל הוא גל סינוס.

6 דוגמה - חישוב ירידה של העוצמה

- מקור מייצר גל קול כדורי. חיישן בעל שטח חתך של 0.2m^2 ממוקם במרחק $r_1 = 0.8\text{m}$ מהמקור ומודד הספק של $P = 3\text{mW}$.
- מהי העוצמה של הגל במרחק r_1 ?
 - מהו ההספק של המקור?
 - מה העוצמה של הגל במרחק $r_2 = 1.2\text{m}$?
 - מה ההספק שימדוד החיישן במרחק r_2 ?

7 תרגיל - חליל בצליל לה

מה צריך להיות אורכו של חליל, על מנת שהתנודה הבסיסית שלו תהיה הצליל לה - כלומר תדר 440Hz ? הניחו שמהירות הקול היא 340m/s ושניתן להתייחס לחליל כצינור הפתוח בשני קצותיו.

8 תרגיל - כמה תדירויות נמצאות בתחום השמיעה

- צינור באורך של 1m מרעיש כאשר הרוח נושבת. מהירות הקול היא 340m/s .
- אם הצינור פתוח בשני קצותיו, כמה מתוך ההרמוניות שלו נמצאות בתחום השמיעה? ($20\text{Hz} - 20\text{kHz}$)
 - ציירו את החלק המרחבי של ψ_p עבור שלושת ההרמוניות הראשונות, במקרה שבו הצינור פתוח רק בצד אחד.

9 תרגיל - רזולוציית מדידה של עטלף

- עטלפים משתמשים בגלי קול בשביל למפות את המרחב (בדומה ל"סונר"). נניח כי עטלף שולח גלי קול אל חפץ מסוים ומודד את מיקומו ביחס אליו על ידי מדידת הזמן שלוקח לגלי הקול לחזור אליו מהחפץ.
- בהנחה שהעטלף והחפץ עומדים במקומם, מה צריכה להיות רזולוציית המדידה של העטלף? כלומר, מהו הזמן הכי קצר שהוא צריך למדוד, על מנת לזהות חפץ הנמצא במרחק 40cm ממנו?
 - בהנחה שגודל החפץ הכי קטן שהעטלף מסוגל לזהות הוא בסדר גודל של אורך הגל שהעטלף מייצר, מה יהיה התדר אותו צריך העטלף לייצר על מנת לזהות חפץ בגודל של 1cm ? הניחו כי מהירות הקול היא 340m/s .



(10) תרגיל - ערכי RMS

ערך RMS של פונקציה מחזורית בזמן בעלת זמן מחזור T מוגדר כך:

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

ההפרעה בלחץ בגל קול מישורי נתונה ביחידות פסקל לפי:

$$\psi_p(x, t) = 6 \cdot 10^{-6} \cos(kx - \omega t)$$

נתון גם:

$$P_0 = 0.8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \gamma = 1.4, v = 340 \text{ m/sec}, \omega = 7000 \text{ rad/sec}$$

א. מהו אורך הגל?

ב. מהו ערך ה-RMS של התנודות בלחץ?

ג. מהו ערך ה-RMS של המהירות החומרית בגל?

ד. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$?

ה. מהו ההספק הממוצע בזמן הנקלט בגלאי בעל שטח של 0.15 m^2 , המאונך לכיוון התקדמות הגל?

(11) תרגיל - גל קול כדורי וערכי RMS

מקור מייצר גל קול כדורי הרמוני בתדר 500 Hz . ערך ה-RMS של הלחץ

במרחק $r_1 = 30 \text{ cm}$, הוא 4 N/m^2 .

נתון גם: $P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2, \gamma = 1.5, v = 330 \text{ m/sec}$.

א. מהו ערך ה-RMS של הלחץ במרחק $r_2 = 15 \text{ m}$?

ב. מהו ערך ה-RMS של פונקציית ההעתק באותו המיקום?

ג. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$ באותו מיקום?

תשובות סופיות

(1) לא

(2) 0.30mm

(3) 18144J

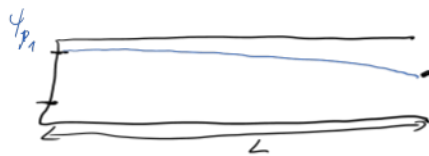
(4) 1.26

(5) $\psi(x,t) = 0.123 \sin(222x - 75.4 \cdot 10^3 t)$

(6) א. $15 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$ ב. 0.121 W ג. $6.67 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$ ד. 1.33mW

(7) 0.39 m

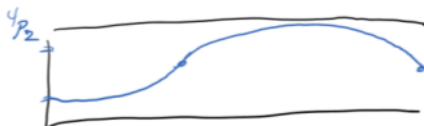
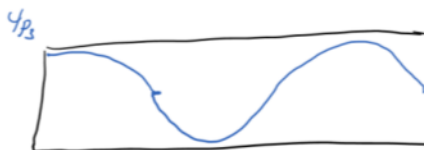
(8) א. 117



ב.

(9) א. 2.35 ms ב. 34 kHz

(10) א. 0.31m

ב. $4.24 \cdot 10^{-6} Pa$ ג. $1.29 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s}$ ד. $1.6 \cdot 10^{-15} \frac{s}{m^2}$ ה. $8.18 \cdot 10^{-14} W$ (11) א. $0.08 \frac{N}{m^2}$ ב. $5.6 \cdot 10^{-8} m$ ג. $4.3 \cdot 10^{-8} \frac{s}{m}$

אפקט דופלר

רקע

עבור מקור נע וצופה נייח :

$$f' = f_s \frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}}$$

f' - התדר המוסט.

v_s - מהירות המקור, חיובית עם כיוון התקדמות הגל.

f_s - תדירות המקור (התדירות שהצופה היה קולט אם המקור לא היה זו).

v - מהירות הגל.

עבור מקור וצופה נעים :

$$f_0 = f_s \frac{v + v_0}{v - v_s}$$

f_0 - התדר המוסט (התדר שקולט צופה שנע).

v_0 - מהירות הצופה, חיובית נגד כיוון התקדמות הגל.

גלי הלם :

$$\sin \theta = \frac{v}{v_s}$$

θ - חצי מזווית הראש של קונוס גל ההלם.

שאלות

(1) מציאת המהירות של גוף בתנועה הרמונית

גוף קטן בעל מסה m נע בתנועה הרמונית. הגוף משדר גל קול באופן רציף. מודדים את התדירות המינימלית והמקסימלית של גלי הקול הנקלטים מהגוף. חשבו את האנרגיה הקינטית של הגוף באמצעות התדירויות. הניחו שהבעיה חד מימדית.

(2) מקור נע בתאוצה*

מקור נע במהירות v_s לכיוון צופה ניח הנמצא במרחק L ופולט גלי קול בתדירות f_s (תדירות המקור). המקור מתחיל להאיץ בתאוצה קבועה a . מהי התדירות אותה ימדוד הצופה כתלות בזמן? ניתן להניח כי: $aT \ll v_s$ וכי הצופה תמיד רחוק מהמקור. שימו לב כי לגל לוקח זמן להגיע לצופה.

(3) נמלה מטיילת על מיתר

במיתר אינסופי קיימת הפרעה מהצורה: $\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$

כאשר אורך הגל ומהירות הגל הן: $\lambda = 0.4\text{m}$, $v = \frac{7\text{m}}{\text{sec}}$.

נמלה מטיילת על המיתר במהירות $0.2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בכיוון הפוך לכיוון התקדמות הגל. כמה פעמים עולה ויורדת הנמלה כל שניה?

(4) מדידת מהירות של צוללת

צוללת נעה במהירות: $v_1 = \frac{19\text{m}}{\text{sec}}$ מזהה צוללת נוספת הנעה לכיוונה.

בצוללת יש סונר המייצר גלי קול בתדר קבוע: $f = 1000\text{Hz}$. גלי הקול פוגעים בצוללת השנייה וחוזרים לסונר. התדר של הגל המוחזר שמודד הסונר הוא: $f' = 1060\text{Hz}$.

ידוע שמהירות הגלים במי ים היא: $v = 1519 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

חשבו את מהירות הצוללת השנייה (ביחס לקרקע).



5) פעימות של גל המוחזר מפגיעה בקיר

אדם העומד הרחק מקיר מחזיק מקור שפולט צלילים בתדירות 280Hz .

האדם מתחיל לנוע לכיוון הקיר, עם המקור בידיו, במהירות $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

הניחו שמהירות הקול היא: $330 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מה תדירות הצליל אותה היה שומע מאזין הנמצא ליד הקיר במנוחה?

ב. אילו האדם שנע היה יכול להאזין רק לגל המוחזר מהקיר,

מה תדירות הצליל שהוא היה שומע?

ג. נניח שעוצמת הגל המוחזר מהקיר זהה לזו של הגל הפוגע.

מה התדר ששומע האדם שנע ומהי תדירות הפעימות של גל זה?

תשובות סופיות

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}} \right)^2 \quad (1)$$

$$f_s = \frac{1}{v_s + a \left(t - \frac{L}{v} \right)} \quad (2)$$

$$18 \quad (3)$$

$$34.8 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (4)$$

$$283\text{Hz} \quad \text{א.} \quad 285\text{Hz} \quad \text{ב.} \quad (5)$$

ג. תדירות הגל היא: 283Hz ותדירות הפעימות היא: 2.6Hz .

מבוא לגלים

פרק 7 - חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה)

תוכן העניינים

59	1. יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה
61	2. התרחבות בזמן של פולס
63	3. גלים דועכים ותדירויות סף
64	4. מקרים מיוחדים
66	5. תרגילים נוספים

יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה

רקע

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה: $\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dx$

כאשר: $A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$

מהירות הפאזה: $v_\phi(k) = \frac{\omega}{k}$

מהירות החבורה: $v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

שאלות

1) מיתר מתכתי

יחס הנפיצה שמתאר תנודות של מיתר מתכתי ממשי הקשור בשני קצוותיו

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho} \right) k^2 (1 + \varepsilon L^2 k^2)$$

כאשר T המתוחות, ρ צפיפות המסה ליחידת אורך, $\varepsilon \ll 1$ פרמטר חסר יחידות המייצג את קשיחות המיתר ו- L אורך המיתר.

א. חשבו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה.

ב. הסבירו מדוע מספרי הגל ואורכי הגל זהים לאלו המתקבלים אם המיתר היה אידיאלי.

ג. רשמו את התדירויות העצמיות כתלות ב- n ושאר הנתונים בבעיה.

ד. הראו שבגבול $n \rightarrow \infty$ התדירויות פרופרופציוניות ל- n^2 והשוו למיתר אידיאלי.

ה. נגדיר את התחום האידיאלי של מיתר על פי $\varepsilon L^2 k^2 \ll 1$.

כמה אופני תנודה נמצאים בתחום האידיאלי במיתר שבו $L = 1.2m$

ו- $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$.

(2) הוכחת נוסחה נוספת למהירות החבורה

הראו שניתן לרשום את מהירות החבורה בתור: $v_g(k) = k \frac{\partial v_\phi}{\partial k} + v_\phi$.

(3) חילוץ משוואה מתוך יחס נפיצה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

כאשר ω_p ו- c קבועים.

א. רשמו את משוואת הגלים המתאימה ליחס הדיספרסיה הנ"ל.

ב. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה ובדקו מה קורה בגבול של: $ck \gg \omega_p$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } v_g = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{T}{\rho} (2k + 4\varepsilon L^2 k^3) \right), \quad v_\phi = \sqrt{\left(\frac{T}{\rho} \right) (1 + \varepsilon L^2 k^2)}$$

ב. מספרי הגל ואורכי הגל מגיעים מתנאי השפה ואינם מושפעים מיחס הנפיצה.

$$\text{ג. } f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{T}{\rho} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} (1 + \varepsilon \pi^2 n^2) \right) \frac{1}{2}$$

ד. הוכחה בסרטון.

ה. $n \approx 7$

(2) הוכחה בסרטון.

$$(3) \text{ א. } \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\text{ב. } v_g = \frac{c^2 k}{\omega}, \quad v_\phi = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{k^2} + c^2} \quad \text{בגבול } \omega_p \gg ck$$

התרחבות בזמן של פולס

רקע

הרוחב כתלות בזמן של פונקציית גאוסיאן: $\sigma^2(t) = \frac{\sigma^4 + 4\beta^2 t^2}{\sigma^2}$

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו- $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0}$.

שאלות

1) פולס בסיבים אופטיים

נתבונן על הדיספרסיה בסיבים אופטיים. משדרים פולס גאוסיאני בעל אורך זמני τ_0 לסיב באורך l .

מהירות החבורה בסיב היא: $v_g(k)$.

א. ההרחבה הזמנית של הפולס מוגדרת לפי: $\Delta\tau = \sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}$.

מצאו נוסחה להרחבה הזמנית כתלות בפרמטרים: τ_0, v_g, l, β .

השווה ל- $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$.

הדרכה: השתמשו בנוסחה של ההרחבה המרחבית: $\sigma^2(t) = \frac{\sigma^4 + 4\beta^2 t^2}{\sigma^2}$

ועברו לרוחב הזמני על ידי חלוקה במהירות החבורה.

ב. נתון שמהירות הפאזה עבור סיב ספציפי סביב אורך גל: $\lambda_0 = 1.55 \mu m$

היא: $v_\varphi(k) \approx \frac{c}{n} \left(1 + \frac{k}{q} \right)$ כאשר c היא מהירות האור, n הוא מקדם

השבירה של הסיב ו- q פרמטר נוסף.

מהו משך רוחב הפולס שניתן לשדר כך שההרחבה שלו תהיה בגודל

הרוחב המקורי, כלומר: $\Delta\tau = \tau_0$

ג. חשבו את $\Delta\tau$ כאשר:

$$n = 1.47, \quad q = 4.35 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{m}, \quad \lambda_0 = 1.55 \mu m, \quad l = 75 km, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$$

מהי המגבלה על קצב השידור המירבי אם הדיספרסיה היא הגורם המגביל?

(2) יחס מדומה בגאוסיאן

בתווך כלשהו מתקיים יחס הנפיצה הבא: $\omega(k) = \alpha k - i\beta k^2$ כאשר α ו- β קבועים חיוביים נתונים.

א. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה כתלות ב- k .

ב. רשמו ביטוי אינטגרלי כללי ל- $\psi(x, t)$ עבור פולס שנע בכיוון החיובי

בהינתן: $\psi(x, 0) = f(x)$.

ג. מצאו את: $\psi(x, t)$ עבור פונקציית גאוסיאן: $\psi(x, 0) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$.

ד. מהו רוחבו ומרכזו של הגאוסיאן כתלות בזמן?

(3) רוחב חבילה לאחר מרחק 3 סיגמה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה

הבא: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

מעוררים בפלסמה חבילת גלים גאוסיאנית ברוחב σ ותדירות מרכזית $\omega_0 > \omega_p$.

מצאו את רוחב החבילה לאחר שהתקדמה מרחק 3σ .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \Delta\tau = \frac{2\beta l}{\tau_0 v_g^3} \quad \text{א.} \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{2n^2 l}{c^2 q \left(1 + \frac{4\pi}{q\lambda_0}\right)^3}} \quad \text{ב.} \quad \lambda = 2.87 \cdot 10^{11} \text{ sec} \quad \text{ג.}$$

$$(2) \quad v_g(k) = \alpha - 2i\beta k, \quad v_\phi(k) = \alpha - i\beta k \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - (\alpha k - i\beta k^2)t)} dk$$

$$\text{ג.} \quad \psi(x, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 2\beta t}} Ae^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \alpha t)^2}{\sigma^2 + 2\beta t}}$$

$$\text{ד.} \quad \mu = \alpha t, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2 + 2\beta t}$$

$$(3) \quad \frac{qc^2 \omega_p^4}{\omega_0^4 (\omega_0^2 - \omega_p^2)} + \sigma^2$$

גלים דועכים ותדירויות סף

רקע

במקרים מסוימים יחס הנפיצה יכול לייצר מספר גל מורכב עבור תדירויות מסוימות. במקרים אלו נקבל גל דועך בתווך. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.

שאלות

1) גל דועך בפלסמה

גלים אלקרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה

הבא: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים, מעוררים גל

בתדירות: $\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_p$.

רשמו ביטוי לפונקציית הגל, מהו קבוע הדעיכה?

תשובות סופיות

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}x} e^{-i\frac{1}{2}\omega_p t} \quad (1)$$

קבוע הדעיכה הוא: $\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}$.

מקרים מיוחדים

רקע

מכניקת הקוונטים:

פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} : \text{משוואת שרדינגר}$$

$$\rho = \hbar k : \text{התנע של חלקיק}$$

גלי מים:

יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tanh(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח

H – עומק הנוזל

g – תאוצת הכובד

ρ – צפיפות המסה ליחידת נפח

עבור גלים קצרים (גלי מתח פנים): $\lambda \ll \lambda_c \sim 2cm$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל): $H \gg \lambda \gg \lambda_c$

$$\omega = \sqrt{gk}$$

עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל): $\lambda \gg H \gg \lambda_c$

$$\omega = \sqrt{gHk}$$

שאלות

(1) קירובים במים עמוקים

יחס הנפיצה של גלים על השפה של נוזל לא צמיג נתון בקירוב

ע"י: $\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tanh(kH)$ כאשר g היא תאוצת הכובד, H גובה הנוזל, σ מתח הפנים ו- ρ צפיפות הנוזל.

במקרים בהם המים עמוקים ביחס לאורך הגל אז: $\tanh(kH) \approx 1$ ויחס הנפיצה

ניתן בקירוב ע"י: $\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3$.

א. הראו באופן כללי שבנקודת הקיצון של מהירות הפאזה מתקבל שמהירות החבורה שווה למהירות הפאזה.

ב. מהו אורך הגל λ_c במקרה הנתון שבו מהירות הפאזה שווה למהירות החבורה? ומהן המהירויות באורך גל זה?

ג. הראו כי עבור גלי כבידה שבהן $\lambda \gg \lambda_c$ מתקבל: $v_g = \frac{1}{2} v_\phi$.

ד. הראו כי עבור גלי מתח פנים שבהם $\lambda \ll \lambda_c$ מתקבל: $v_g = \frac{3}{2} v_\phi$.

(2) צונמי ליד טונגה

בינואר 2022 התפוצץ הר געש תת ימי כ-65 ק"מ מאיי טונגה שבאוקיינוס השקט. קוטר הר הגעש הוא כ-10 ק"מ והוא יצר גל באורך של כ-20 ק"מ. כמה זמן ייקח לגל להגיע לאיים? וכמה זמן ייקח לגל להגיע לחופי קליפורניה שנמצאים בערך 8,500 ק"מ מנקודת היווצרות הגל? הניחו כי עומק האוקיינוס הוא כ-4 ק"מ.

תשובות סופיות

(1) א. הוכחה בסרטון. ב. $v_g(\lambda_c) = \sqrt{2} \left(\frac{g\sigma}{\rho} \right)$, $\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$.

ג. הוכחה בסרטון. ד. הוכחה בסרטון.

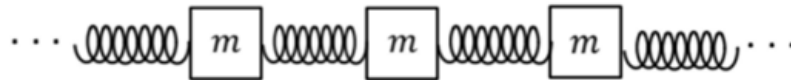
(2) כ-70 שניות לטונגה וכ-26 שעות לקליפורניה.

תרגילים נוספים

שאלות

(1) גלי רוחב בשרשרת מסות בדידה

נתונה מערכת של שרשרת מסות זהות m המחוברות בקפיצים זהים בעלי קבוע k_0 . המסות נמצאות במרחקים זהים אחת מהשנייה ומרחקים אלו גדולים בהרבה מהאורך הרפוי של הקפיץ ומתנודות המסות. מצאו את משוואת הגלים עבור גלי רוחב, כלומר תנודות המסות הן בכיוון מאונך לקפיצים, ומצאו את יחס הדיספרסיה.



(2) מודל לגביש עם שכנים רחוקים

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה m . בשיווי משקל המרחק בין זוג אטומים הוא l . נתון שכל אטום מחובר לשני שכניו הקרובים ביותר באמצעות קפיצים זהים בעלי קבוע קפיץ k_0 ולשני שכניו הבאים בתור באמצעות קפיצים בעלי קבוע קפיץ k_1 .

א. מצאו את יחס הנפיצה של תווך זה.

ב. מהי מהירות החבורה כתלות ב- k (מספר הגל)?

(3) החזרה והעברה בתווך עם נפיצה

מיתר בעל יחס נפיצה: $\omega = ck$ משתרע מ- $x = -\infty$ עד $x = 0$. ב- $x = 0$ המיתר מחובר למיתר אחר המשתרע עד $x = \infty$ ובו מתקיימת

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

(זוהי משוואת קליין גורדון לחלקיק קוונטי יחסותי).

א. מצאו את יחס הנפיצה במיתר הימני.

ב. גל הרמוני בתדירות ω ואמפליטודה A מתקדם מ- $-\infty$ למיתר הימני.

מצאו את הביטויים עבור הגל המוחזר ועבור הגל העובר במקרים הבאים:

$$\omega > \frac{mc^2}{\hbar} \quad \text{i.}$$

$$\omega < \frac{mc^2}{\hbar} \quad \text{ii.}$$

ג. חשבו את מקדמי ההחזרה וההעברה של ההספק: $R_p = \left\langle \frac{P_r}{P_i} \right\rangle$

ו- $T_p = \left\langle \frac{P_t}{P_i} \right\rangle$ בשני המקרים שבסעיף הקודם.

רמז: העזרו בשימור אנרגיה.

תשובות סופיות

$$\omega(k) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kl}{2}\right), \quad k(4_{n+1} - 24_n + 4_{n-1}) = m\ddot{\psi}_n \quad (1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \omega^2(k) = 4\omega_1^2 \sin^2(kl) + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kl}{2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\omega} (2\omega_1^2 l \cdot \sin(2kl) + \omega_0^2 l \sin(kl)) \quad (3)$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_s^2, \quad \omega_s^2 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (3)$$

$$\psi_t(x, t) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} Ae^{-i\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_s^2}}{c}x - \omega t\right)}, \quad \psi_r(x, t) = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad \text{ב. i.}$$

$$\psi_t(x, t) = \frac{2A}{1 + i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 - 1}} e^{-\frac{\sqrt{\omega_s^2 - \omega^2}}{c}x} e^{-i\omega t}, \quad \psi_r(x, t) = \frac{1 - i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 - 1}}{1 + i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 - 1}} Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad \text{ii.}$$

$$T_p = 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} \right)^2, \quad R_p = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} \right)^2 \quad \text{ג. i.}$$

$$T_p = 0, \quad R_p = 1 \quad \text{ii.}$$

מבוא לגלים

פרק 8 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

68	1. גלים דו מימדיים
71	2. מנחה גלים

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים :

$$\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
 ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון :

$$z(x, y, t) = A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y)$$

כיוון וקטור הגל $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל :

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה :

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} (k_x^2 + k_y^2) = v^2 \cdot |\vec{k}|^2$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה :

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L_y} y\right) \cos(\omega_{m,n} t + \varphi_{m,n})$$

שאלות

(1) תנאי התחלה משולשים בתוף ריבועי

נתון תוף ריבועי כך ש: $0 \leq x, y \leq L$. התוף קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליח' אורך T וצפיפות ρ . מותחים את מרכז התוף במרכזו ומשחררים ממנוחה כך שבזמן: $t = 0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x, y, 0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & , 0 \leq q \leq \frac{L}{2} \\ L - q & , \frac{L}{2} \leq q \leq L \end{cases}$$

- א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.
- ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוף ולא בפינה רמז: אין צורך לפתור מחדש.
- ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{411}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

(2) תוף ריבועי לא איזוטרופי

- נתון תוף ריבועי בגודל $L_x L_y$, התפוס בקצותיו. התוף אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y .
- א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוף.
 - ב. מהו יחס הנפיצה?
 - ג. מהם אופני התנודה?

תשובות סופיות

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} y\right) \cos(w_{m,n} t) \quad \text{א. (1)}$$

$$A_{m,n} = \frac{16L^2}{\pi^2 m^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} (n^2 + m^2)$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} \left(y + \frac{L}{2}\right)\right) \cos(w_{m,n} t) \quad \text{ב.}$$

ג. 10

$$\frac{T_x}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{T_y}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{א. (2)}$$

$$w^2 = \frac{T_x}{\rho} k_x^2 + \frac{T_y}{\rho} k_y^2 \quad \text{ב.}$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L_y} y\right) \cos(w_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \quad \text{ג.}$$

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x, y, t) = A \sin\left(\frac{\pi n}{L} y\right) e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g = \frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g \cdot v_\phi = v^2$$

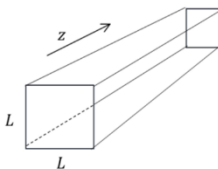
חסם תחתון:

$$\omega > \frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L . שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z . משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

א. מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x, y, z, t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.

ב. הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.

ג. מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } \psi(x, y, z, t) = (Ae^{ik_x x} + Be^{-ik_x x})(Ce^{ik_y y} + Dc^{-ik_y y})e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\text{ב. } \psi_{m,n}(x, y, z, t) = A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\omega^2 = v^2 \left(\left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L} \right)^2 + k_z^2 \right)$$

$$\text{ג. } \omega_{m,n} = \frac{v\pi}{L} \sqrt{2}$$

$$\text{ד. } \psi_{m,n}(x, y, z, t) = A_{m,n} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

מבוא לגלים

פרק 9 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 73

משוואות הגלים האלקטרומגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{ובריק:}$$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.

המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{i(kx - \omega t)}]$

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}, u_g = \frac{d\omega}{dk}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

כאשר:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad \text{וקטור הגל -}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

$$\omega = u|k| = u\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad \text{יחס הדיספרסיה בגל:}$$

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \hat{k}$.

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדו"כ ב- $\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:

כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל. התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי. (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{העכבה של התווך:}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi \quad \text{בריק:}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E},$$

$$\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).
הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם העוצמה של הגל):

$$\vec{S}_{\text{Avg}} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^*}{2} \right\}$$

$\vec{\tilde{E}}$ ו- $\vec{\tilde{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$$

שאלות:

- (1) **דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**
השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי
הבא: $\vec{E} = 4\pi \cos(10^9 t - 6x) \hat{y} \frac{mV}{m}$
א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?
ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?
ג. מהו $\vec{H}$ ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

- (2) **דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים**
השדה: $\vec{H} = H_0 e^{i(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \cdot \frac{3\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{10}}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.
מצאו את:
א. וקטור הגל ואורך הגל.
ב. תדר הגל.
ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.
ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.
ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } f = 1.59 \cdot 10^8 \text{ Hz}, \lambda = \frac{\pi}{3} \text{ m} \quad \text{ב. } n = 1.8, \varepsilon_r = 3.24$$

$$\text{ג. } \vec{H} = 6 \cdot 10^{-5} \cos(6x - 10^9 t) z \frac{A}{m}, \vec{S}_{Avg} = 12\pi \cdot 10^{-8} \hat{x}$$

$$(2) \quad \text{א. } \vec{K} = 2\pi(1, -3, 0), \lambda = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ m} \quad \text{ב. } f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

$$\text{ג. } u = 5 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^6 \frac{m}{\text{sec}}, n = 18.97 \quad \text{ד. } \eta = 2\pi \cdot \sqrt{10}, \varepsilon_r = 360$$

$$\text{ה. } \vec{E}(x, y, t) = -2\pi \cdot \sqrt{10} \cdot H_0 e^{i(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \hat{z}$$

קיטוב מעגלי ואליפטי

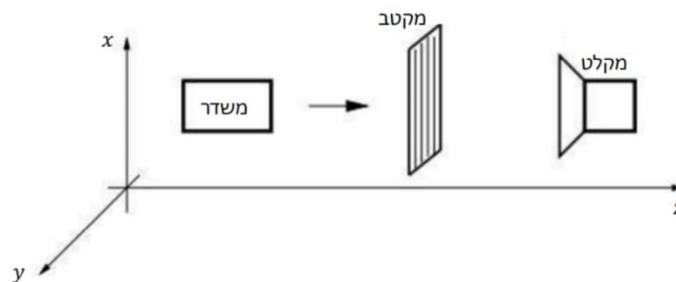
רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי - כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90° .
 כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
 השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .
קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90° .
 ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .
קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של 90° והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ- 90° .

שאלות:

1) דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים

נתונה המערכת הבאה:



במערכת, המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.
 והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.
 המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.
 כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.
 א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל.
 רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.
 ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית של 30° מעלות ביחס לציר ה- x .
 מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

(2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי

מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.

עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} + 3E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ב. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ג. $\vec{E} = E_0 \cos(kz + \omega t) \hat{x} + E_0 \cos\left(kz + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

ד. $\vec{H} = H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

תשובות סופיות:

(1) א. $\vec{E}(z, t) = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t)$ ב. $\frac{3}{16}$

(2) א. קיטוב ליניארי, $\theta = 72^\circ$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

ד. קיטוב ליניארי, $\theta = -45^\circ$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free} \quad B_{2\perp} = B_{1\perp}$$

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \quad H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = k_{free}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = k_{free} = 0$
הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).
לא לבלבל בין n ל- η .

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

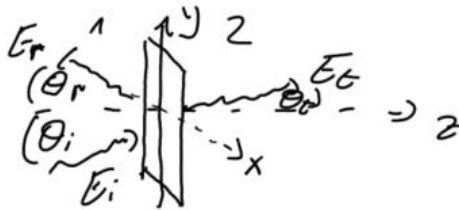
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t} \quad \text{חוק סנל:}$$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת **זווית קריטית**.
 אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = \text{shiftsin} \left(\frac{n_t}{n_i} \right)$$

משוואות פרנל:

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^\perp = \tau^\perp$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל למישור הפגיעה):

$$\Gamma^{\parallel} = \frac{E_{r_0}^{\parallel}}{E_{i_0}^{\parallel}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^{\parallel} = \frac{E_{t_0}^{\parallel}}{E_{i_0}^{\parallel}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\parallel} = \tau^{\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2 \theta_B^{\parallel} = \frac{1 - \frac{\mu_t \epsilon_i}{\mu_i \epsilon_t}}{1 - \left(\epsilon_t / \epsilon_i \right)^2}$$

אם: $\mu_2 \approx \mu_1$ אז:

$$\sin \theta_B^{\parallel} = \frac{1}{1 + \epsilon_i / \epsilon_t}$$

$$\tan \theta_B^{\parallel} = \frac{n_t}{n_i}$$

בקיטוב אנכי:

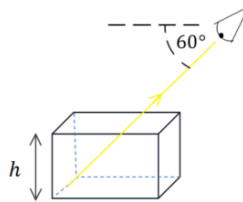
$$\sin^2 \theta_B^{\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_i \epsilon_t}{\mu_t \epsilon_i}}{1 - \left(\mu_i / \mu_t \right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

שאלות:

(1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

לתיבת זכוכית ריקה גובה של: $h = 6\text{cm}$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$. איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה? (מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).



(2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים. גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות. דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).



(3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

- גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני המים. הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).
- מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.
 - המקוטב אנכית פוגע בפני המים בזווית שחישבתם בסעיף א.
 - מהי זווית ההעברה של הגל?
 - מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

(4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

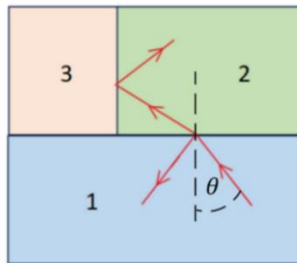
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.3$, $n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש- θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמבילות זהה).

**(5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים**

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z . הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x . בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחוס. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6) תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

- דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוסקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר, כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.
- א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוור) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל, הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).
- ב. מצאו את זווית ההעברה, האם היא תלויה בקיטוב?
- ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.
- ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב ($\tau^\parallel, \tau^\perp$) עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי ההחזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן

$$\text{הבא: } T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |\tau|^2$$

מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית. ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

- ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^\parallel}{T^\perp}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

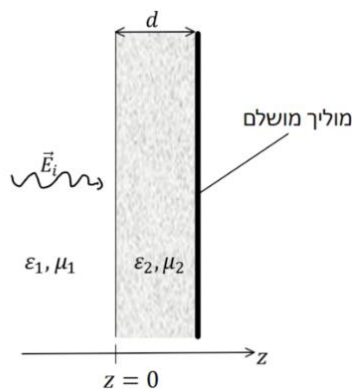
- (1) 1.4cm
- (2) תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$
- (3) א. $\theta_B = 84^\circ$ ב. $\theta_t = 6.4^\circ$
- ג. $\tau^\perp = 0.025, \Gamma^\perp = -0.975$
- (4) א. $\theta \approx 27.5^\circ$ ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.
- (5) א. $E_0 \cos(20^\circ)$ בכיוון: $\hat{x} \cos(20^\circ) + \hat{y} \sin(20^\circ)$ ב. $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(20^\circ) \cos(40^\circ) (\cos(60^\circ) \hat{x} + \sin(60^\circ) \hat{y}) \cos(kz - \omega t)$ ג. $E_0 \cos(20^\circ) \sin(40^\circ)$ בכיוון: $\hat{x} \cos(30^\circ) - \hat{y} \sin(30^\circ)$
- (6) א. $\theta_B \approx 55.6^\circ$ ב. $\theta_t \approx 34.4^\circ$ לא תלויה בקיטוב.
- ג. $\tau^\perp = 1.36, \tau^\parallel = 0.685, \tau^\perp = 0.754, \tau^\parallel = 1$ ה. 33

מעבר של יותר מתווך אחד

רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:



1) שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם

גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ϵ_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ϵ_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי: $\vec{E}_i(z, t) = E_{i0} \hat{x} \cos \omega \left(\frac{z}{u} - t \right)$ מצאו את:

א. $\vec{E}_r(z, t)$

ב. $\vec{E}_1(z, t)$

ג. $\langle S_1 \rangle$

ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.

2) גל עובר דרך פיסת נחושת

גל אלקטרומגנטי מישורי בתדירות 10 MHz עם אמפליטודה E_{i0}

פוגע בניצב לפיסת נחושת (דקה $\sigma = 5.80 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$)

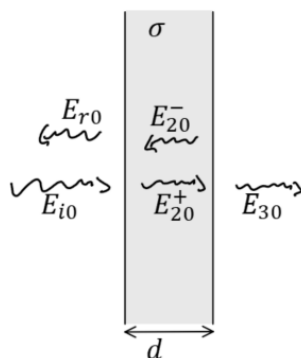
מישורית בעובי d השווה לעומק החדירה.

הזניחו החזרות מסדר שני ומעלה וחשבו את:

א. האמפליטודות של כל שאר

הגלים: $E_{r0}, E_{20}^+, E_{20}^-, E_{30}$ כתלות ב- E_{i0} .

ב. $\frac{\langle S_3 \rangle}{\langle S_{1i} \rangle}$



3) חישוב כל הגדלים

השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי

הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t) \hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.

א. מהו תדר הגל (בהרץ)?

ב. מהו כיוון התקדמות הגל?

ג. מהו אורך הגל?

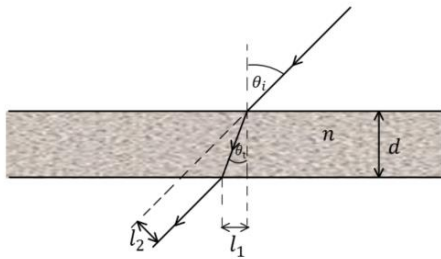
בהנחה כי: $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.

רשמו ביטוי ל- $\vec{H}$.

ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

(4) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל: $\vec{E} = (5i\hat{x} - \hat{y})e^{-i(\pi z + \omega t)}$.

(5) חישוב ההזזה לטרלית (חוק סנל)

קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדקס שבירה n .

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1 .

ג. מצאו את ההזזה הטרלית (המרחק l_2 באיור).

(6) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוהה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של $532nm$ ו- $638nm$. הוא מכוון את הלייזר בזווית 30° מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא $12cm$. את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda \in [0.4\mu m, 0.8\mu m]$ הוא:

$$n(\lambda) \approx -0.8\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 1.4\lambda + 1.7 \text{ מתנול}$$

$$n(\lambda) \approx -0.1\lambda^3 + 0.3\lambda^2 - 0.3\lambda + 1.4 \text{ אתנול}$$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב - μm .

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $n(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ .

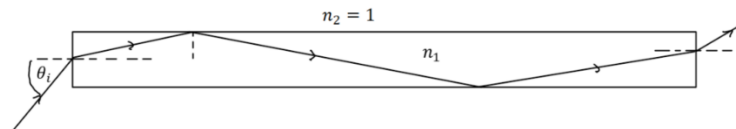
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

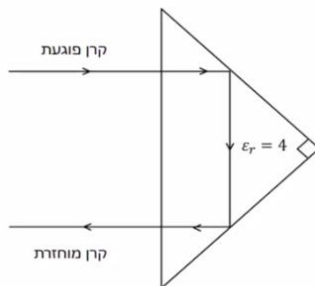


(7) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

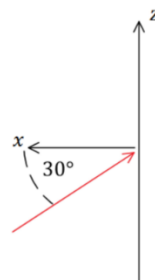
סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1 . גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות. מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i .

**(8) אור מוחזר מפריזמה משולשת**

אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית. מסלול קרן האור מתואר באיור. מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת. הניחו $\epsilon_r = 4$ עבור זכוכית. הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

**(9) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית**

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30° מעלות ביחס לציר ה- x . כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y . הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה. א. כתבו את $\hat{k}$ עבור הגל הפוגע והמוחזר. ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \vec{E}_r(z, t) = E_{i0} \cos(K_1 z + \omega t - 2\theta) \hat{x} \quad \text{כאשר } \tan \theta = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

$$\text{ב. } \vec{E}_1(z, t) = E_{i0} \hat{x} [\cos(K_1 z - \omega t) + \cos(K_1 z + \omega t - 2\theta)] \quad \text{ג. } \langle S_1 \rangle = 0$$

$$\text{ד. } d = \frac{\pi n}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$$

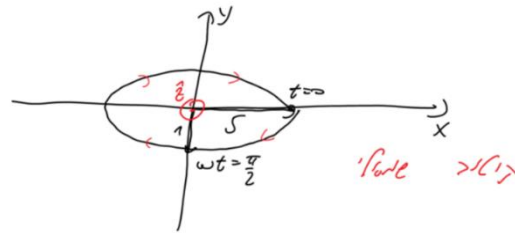
$$(2) \quad \text{א. } \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \approx -1 + 4.67 \cdot 10^{-6} i, \quad \frac{E_{20}^+}{E_{i0}} \approx (1.90 + 0.140i) \cdot 10^{-6}, \quad \frac{E_{20}^-}{E_{i0}} \approx (-2.49 + 4.53i) \cdot 10^{-6}$$

$$\text{ב. } \frac{\langle S_3 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = 3.13 \cdot 10^{-11} \quad \text{ג. } \frac{E_{30}}{E_{i0}} \approx (-2.70 + 4.90i) \cdot 10^{-6}$$

$$(3) \quad \text{א. } f = 10^7 \text{ Hz} \quad \text{ב. בכיוון } -\hat{z} \quad \text{ג. } \lambda = 2\pi m \quad \text{ד. } \epsilon_r = 22.8$$

$$\text{ה. } \vec{H}(z, t) = \frac{1}{8\pi^2} \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t) \hat{x} \quad \text{ו. } \vec{S}_{Avg} = -\frac{\hat{z}}{16\pi^2}$$

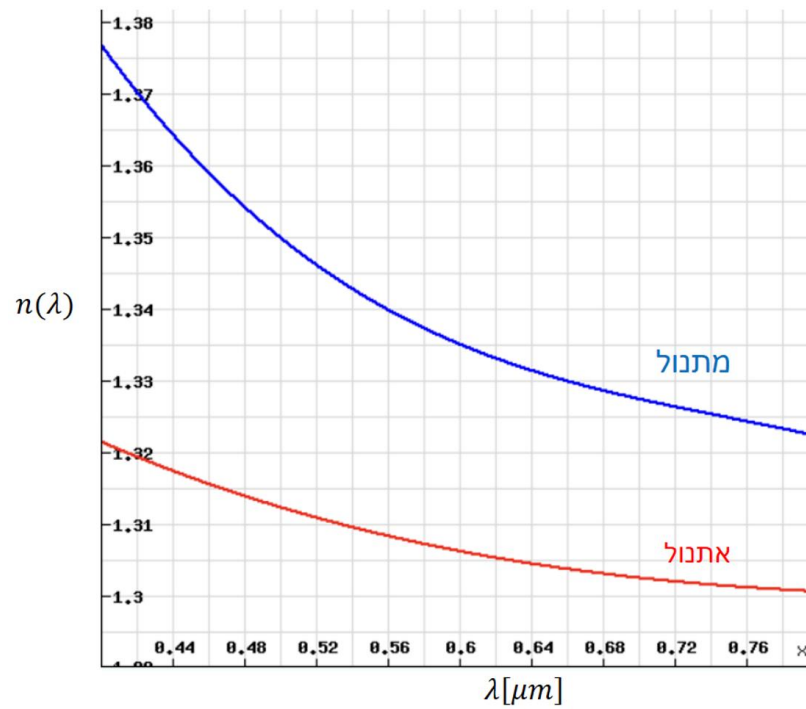
(4) שרטוט:



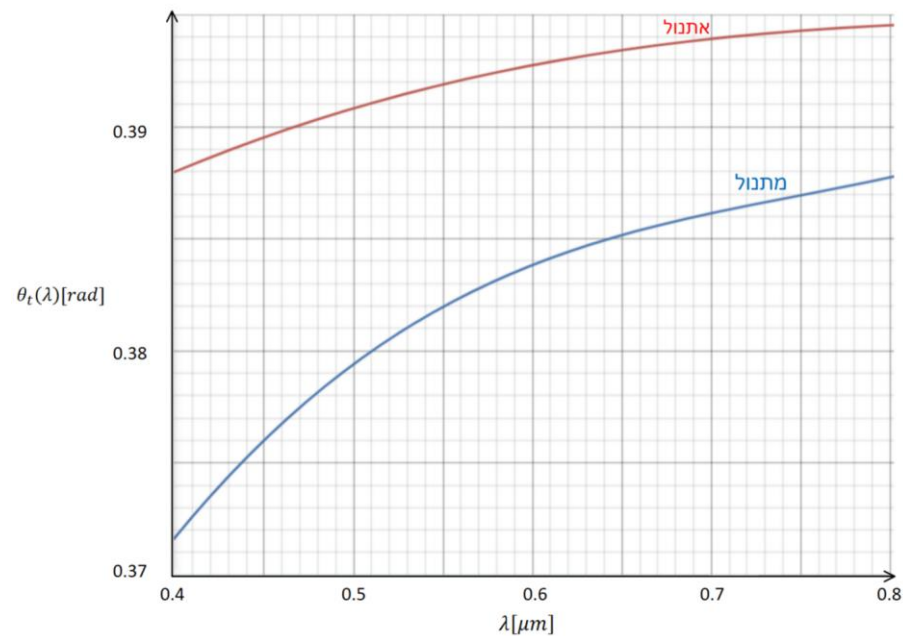
$$(5) \quad \text{א. } \sin \theta_t = \frac{1}{n} \sin \theta_i \quad \text{ב. } l_1 = \frac{d \sin \theta_i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\text{ג. } l_2 = d \sin \theta_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \right)$$

(6) א. שרטוט:



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול - 4.96cm.

(7) $\sqrt{2}$.

(8) 79%.

$$(9) \quad \hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{z} \quad , \quad \hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{z} \quad , \quad \hat{E} = -\hat{y} \quad , \quad \hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{z} + \frac{1}{2} \hat{x} \quad \text{ג.}$$

מבוא לגלים

פרק 10 - התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים

תוכן העניינים

91	1. התאבכות בשני סדקים
93	2. התאבכות ב N סדקים
97	3. עקיפה
98	4. הקשר לפורייה
100	5. התאבכות ועקיפה ביחד
101	6. אינטרפרומטריה
106	7. תרגילים נוספים

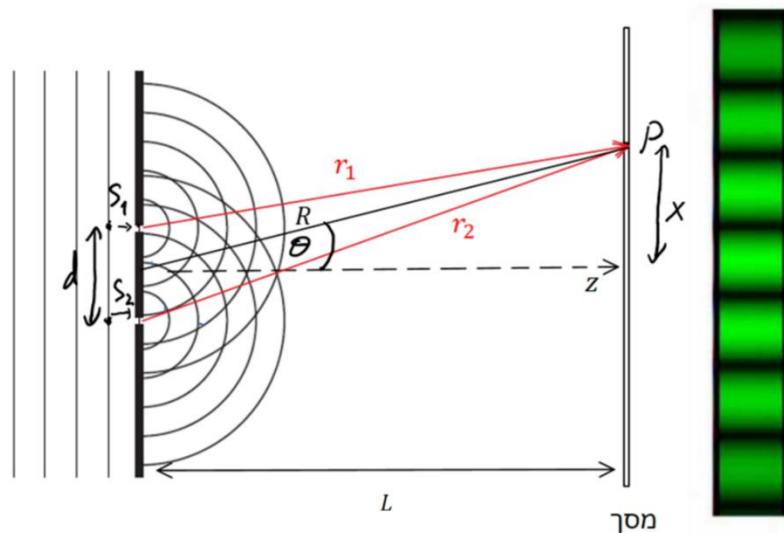
התאבכות בשני סדקים

רקע

עיקרון הווייגנס - ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים - $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, גלים כדוריים - $A \propto \frac{1}{r}$.

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק $L \gg d$ far field limit :

$$1. \quad A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r \ll r$$

$$2. \quad \Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 \parallel r_2$$

העוצמה היחסית :

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2 \left(\frac{k d \sin \theta}{2} \right)$$

קירוב זוויות קטנות :

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים. התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול. בדרכ מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

שאלות

(1) חישוב מרחק בין כתמים ואורך גל

קרן לייזר עוברת דרך שני סדקים. מרכזו של כתם האור הראשון (לצד כתם האור המרכזי), התקבל בזווית של 8 מעלות.

א. באיזו זווית יופיע כתם האור השני?

ב. מהו אורך הגל של הלייזר אם המרחק בין הסדרים הוא: $d = 2.4 \mu m$?

(2) תחנת רדיו

תחנת שידור משדרת אותות רדיו בתדר $1200 Hz$ באמצעות שתי אנטנות הנמצאות במרחק של $300 m$ זו מזו. אם נמקם מקלט במרחק רב משתי האנטנות, באילו כיוונים תתקבל העוצמה הגבוהה ביותר ובאילו הנמוכה ביותר? רשמו את הכיוונים ביחס לישר המחבר בין שתי האנטנות.

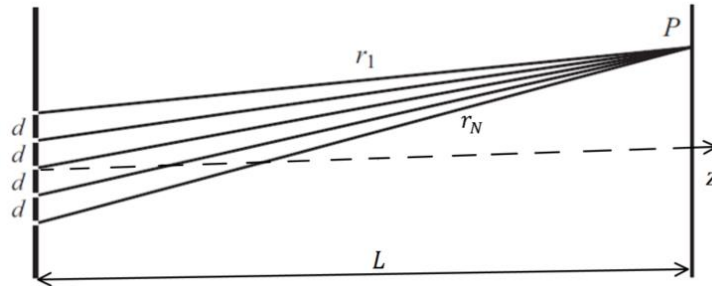
תשובות סופיות

(1) א. 16° ב. $0.33 \mu m$

$$\cos \alpha_{\min} = 9.5 \cdot 10^{-4} \left(n + \frac{1}{2} \right), \cos \alpha_{\max} = 9.5 \cdot 10^{-4} n \quad (2)$$

התאבכות ב N סדקים

רקע



קירוב השדה הרחוק:

$$A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r \ll r$$

$$\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 \parallel r_2 \parallel r_3 \parallel r_4$$

$$\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2$$

$$\alpha = kd \sin \theta$$

פיק גדול - כשהמכנה מתאפס:

$$\alpha_n = 2\pi n$$

נקודות התאפסות - כשהמונה מתאפס והמכנה לא.

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N} \quad n \neq mN$$

פיק קטן - נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס. עבור $N \gg 1$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי) הוא: $\frac{kd}{2\pi}$ (לעגל למטה).

מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1.

שאלות

(1) פריזמה מתקליטור

בתמונה רואים תקליטור העשוי מחריצים מעגליים בגודל של מיקרון בערך. האור שפוגע בתקליטור מוחזר למצלמה ומקבלים פריזמה של צבעים. הסבירו את התופעה (ללא חישוב) וציינו אלו פרמטרים משפיעים עליה.

**(2) סטייה בזווית פגיעה**

הראו שבמקרה שהקרן הפוגעת היא בזווית θ_0 ביחס לאנך עם קיר הסדקים אז תתקבל אותה תבנית התאבכות מוזזת בזווית θ_0 . הניחו קירוב זוויות קטנות.

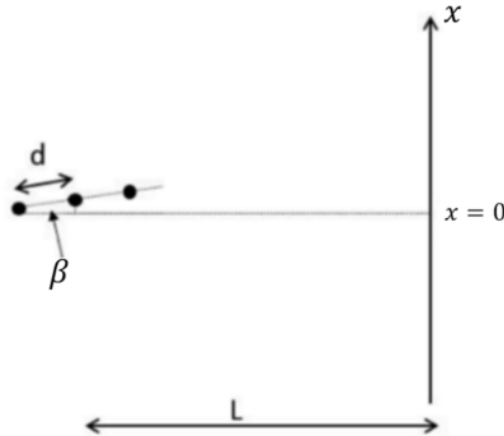
(3) 3 מינימות ראשונות

אור מונוכרומטי מלייזר ארגון בעל אורך גל של $\lambda = 488nm$ עובר דרך סריג בעל 6,000 חריצים בצפיפות של 40,000 חריצים לס"מ ופוגע במסך. מהן הזוויות של שלושת נקודות המינימום הראשונות (בכיוון החיובי). הניחו שהחריצים נקודתיים.

(4) מרחק בין צבעים

מקרניים אור לבן על סריג בעל 5,000 סדקים לס"מ.
א. תארו מה נראה על המסך מול הסריג.
ב. חשבו את המרחק בין כתם האור האדום השני לכתם האור הכחול השני אם המסך נמצא במרחק 1.5 מטר מהסריג ואורכי הגל של האור האדום והכחול הם $632nm$ ו- $420nm$ בהתאמה.

- 5) שלושה מקורות קוהרנטיים באוריינטציה שונה
המערכת המתוארת בסרטוט מכילה שלושה מקורות קוהרנטיים במרחק d
אחד מהשני הנמצאים בזווית β ביחס לאנך למסך. המרחק למסך הוא L .



מצאו את העוצמה היחסית כתלות ב- x בהנחה כי β זווית קטנה וכי $\theta > \beta$.

תשובות סופיות

(1) החריצים בתקליטור יוצרים תבנית התאבכות התלויה באורך הגל, זווית הפגיעה של המקור, בזווית התקליטור ובמיקום הצופה. בכל אזור בתקליטור נוצרת התאבכות בונה עבור אורך גל אחר ולכן רואים את הצבעים השונים בכל אזור. שינוי של הפרמטרים הנ"ל יביא לשינוי התבנית.

(2) ראו סרטון.

$$\theta_1 \approx 0.0186^\circ$$

$$\theta_2 \approx 0.0373^\circ \quad (3)$$

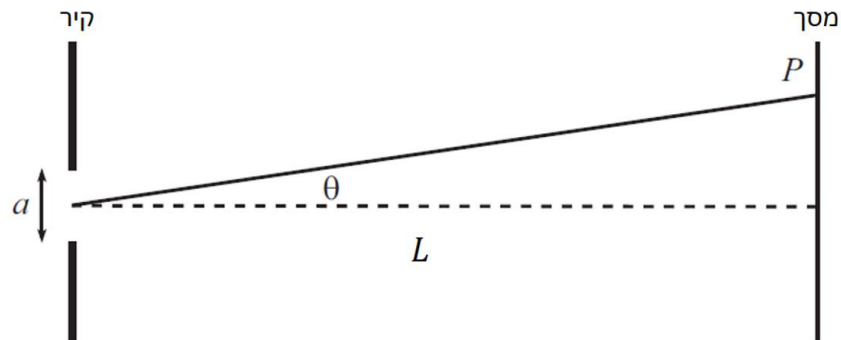
$$\theta_3 \approx 0.0560^\circ$$

(4) א. נקבל תבנית התאבכות של N סדקים שכתם האור המרכזי שלה לבן ובמקום כל כתם אחר נקבל קשת של צבעים כי מיקום הפיק הגדול שאינו במרכז גדל עם אורך הגל.
ב. 70 ס"מ.

$$\alpha = kd \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}} \left[1 + \beta \frac{x}{L} \right], \quad \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2 \quad (5)$$

עקיפה

רקע



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:

$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$$

$$\beta = ka \sin \theta$$

נק' התאפסות: $\beta_n = 2\pi n$

- אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נק' התאפסות וזה אומר שהסדר מתנהג כמו מקור אור נקודתי.
- אם $a \gg \lambda$ אז מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.

מקסימום מקומי - נגזרת מתאפסת :

$$\beta_n \approx 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

הקשר לפורייה

רקע

האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:

$$A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$$

$$k' = k \sin \theta$$

כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

שאלות

1) לאן נעלם שימור האנרגיה?

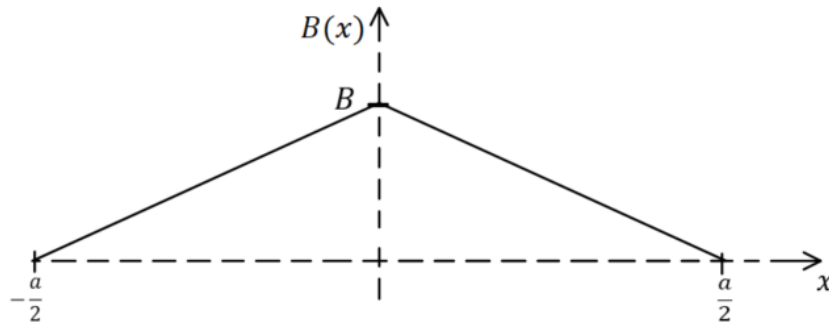
- א. הראו כי בסדק רחב: $I(0) \propto a^2$ כאשר a הוא רוחב הסדק.
 רמז: שימו לב שהאמפליטודה בחלק מהנוסחאות תלויה ברוחב הסדק.
 ב. העוצמה היא אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן. אם נרחיב את רוחב הסדק פי 2 אז $I(0)$ תגדל פי 4. הרחבת הפתח פי 2 מכניסה פי 2 אור ופי 2 אנרגיה איך יתכן שהעוצמה על המסך גדלה פי 4? לאן נעלם שימור האנרגיה?

2) שינוי בעוצמה כתלות בשינוי הפתח

- נניח שיש לנו סדק ברוחב a ואנחנו מסתכלים על העוצמה הממוצעת בנקודה הנמצאת במרחק כלשהו, לא קטן, מהפיק המרכזי אבל עדיין בתחום הזוויות הקטנות.
 מה יקרה לעוצמה הממוצעת (ממוצעת בתחום קטן) אם נגדיל את רוחב הפתח? שימו לב שמצד אחד כשמגדילים את רוחב הפתח אז יותר אור נכנס והעוצמה גדלה אבל מצד שני העקומה מתכווצת והעוצמה בנקודה מסויימת קטנה.
 השאלה היא איזה אפקט יותר חזק?

(3) אמפליטודה בצורת משולש

נתון סדק ברוחב a דרכו עובר גל בעל חזית (פאזה) אחידה אך בעל אמפליטודה לא אחידה. האמפליטודה ליחידת אורך כתלות ב- x כאשר: $x = 0$ זה מרכז הסדק היא:



מצאו את תבנית ההתאבכות $\left(\frac{I(\theta)}{I(0)} \right)$ המתקבלת על מסך הנמצא במרחק רב מהסדק.

תשובות סופיות

- 1) א. הוכחה בסרטון.
ב. אם מגדילים את רוחב הסדק אז העוצמה באפס גדלה אבל התבנית מתכווצת והעוצמה קטנה בזוויות אחרות. האנרגיה שווה לאינטגרל על העוצמה לאורך כל המסך והערך של האנרגיה הכוללת יגדל רק פי 2 ולא פי 4.
2) העוצמה לא תשתנה.

$$\frac{I(\theta)}{I_{\max}} = \sin^4 c^4 \left(\frac{1}{4} ka \sin \theta \right) \quad (3)$$

התאבכות ועקיפה ביחד

רקע

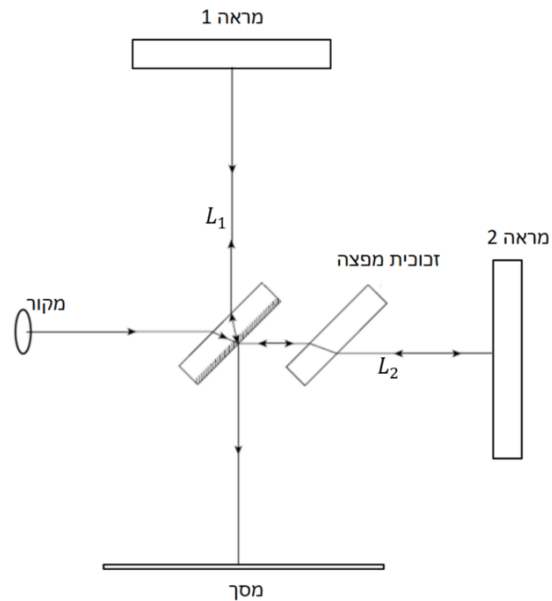
$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left(\sin c \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{Nkd \sin \theta}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{kd \sin \theta}{2} \right)} \right)^2$$

כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו- N מספר הסדקים.

אינטרפרומטריה

רקע

האינטרפרומטר של מייקלסון:



$$\delta = 2(L_2 - L_1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi$$

התאבכות בונה :

$$\delta = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

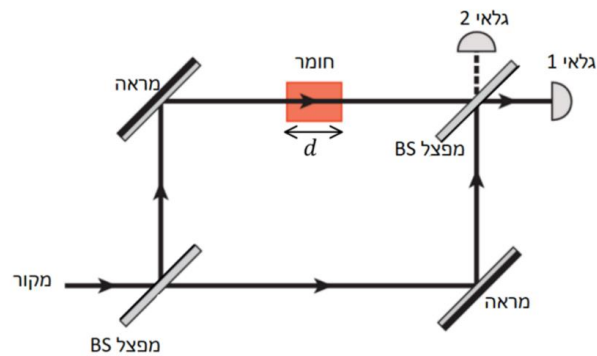
התאבכות הורסת :

$$\delta = \lambda m$$

עוצמה :

$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi\delta}{\lambda} \right)$$

אינטרפרומטר מאך-זנדר:



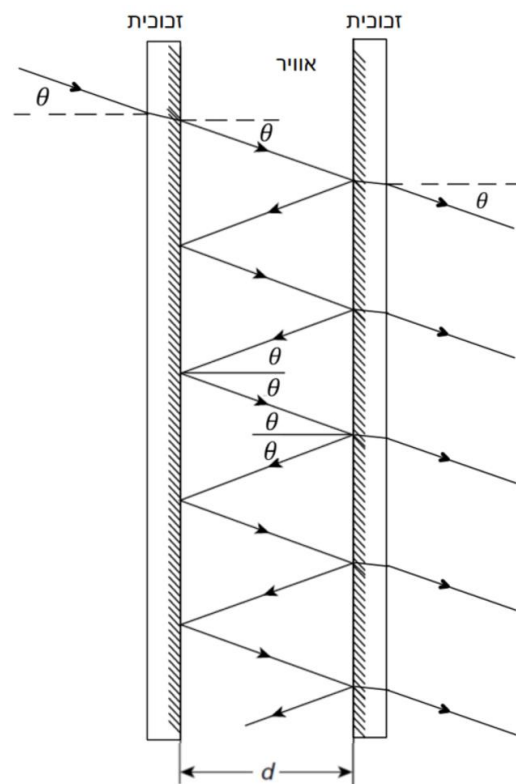
$$\delta = d(n - 1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta \quad \text{גלאי 1}$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi \quad \text{גלאי 2}$$

$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad \text{עוצמה}$$

אינטרפרומטר פברי-פרו:



$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta\varphi = k\delta = k2d \cos \theta$$

$$R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

שאלות

(1) ללא פלטה מפצה

נתון אינטרפרומטר מייקלסון עם מפצל (50:50) העשוי מזכוכית בעובי t ומקדם שבירה n_2 . זווית המפצל היא 45 מעלות, ציפוי הכסף נמצא בדופן האחורית של הזכוכית (כמו במקרה הרגיל) ובמערכת **אין פלטה מפצה**.

א. מהו הפרש הדרכים האופטיות בין הקרניים?

ומהו הפרש הפאזה עבור אורך גל נתון?

ניתן להניח ששינוי הזווית עקב מעברי התווך במפצל זניח מבחינת

אורך הדרך וכי L_1, L_2 גם נתונים.

ב. הניחו שניתן למדוד את העוצמה על המסך.

הראו כי:

$$\lambda = \frac{2\pi(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1 - n_2))}{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{I}{I_{\max}}}\right)}$$

ג. כעת הניחו שהופכים את המפצל כך שציפוי הכסף (ופיצול הקרניים)

יהיה בדופן הקדמית של הזכוכית.

מה יהיה כעת הפרש הפאזה?

(2) גלאי 2

נתון אינטרפרומטר של מאך-זנדר כפי שנראה בסרטון ההסבר.

א. חשבו את הדרך האופטית והפאזה של כל קרן המגיעה לגלאי 2.

ב. חשבו את העוצמה בגלאי 2 והראו כי מתייחס שימור אנרגיה

(ביחיד עם העוצמה בגלאי 1).

(3) מפצל לא סימטרי

נניח כי המפצל באינטרפרומטר מאך זנדר הוא מפצל לא סימטרי כך שמקדם

ההעברה שלו $\left(\frac{A_t}{A_{in}}\right)$ הוא t ומקדם ההחזרה $\left(\frac{A_r}{A_{in}}\right)$ הוא r .

א. רשמו את האמפליטודות של כל אחד מהמסלולים האפשריים ביחס

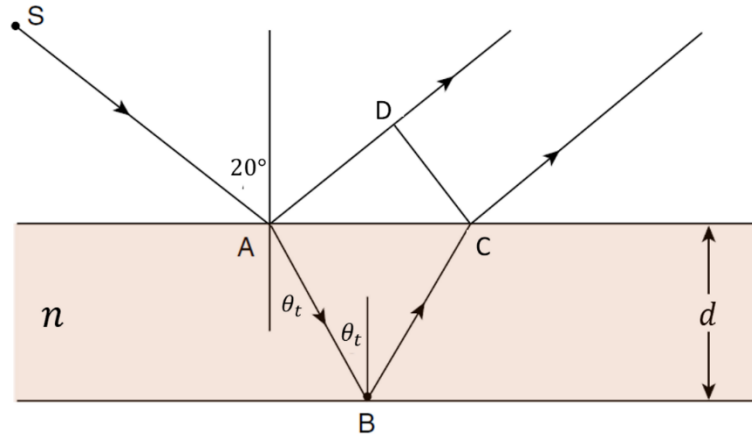
לאמפליטודת הכניסה.

ב. * רשמו מטריצה כללית המתארת את המפצל. כולל תוספת הפאזה אך

ללא התוספת של הדרכים האופטיות.

(4) חישוב עובי קרום דק

גל מישורי לבן פוגע בקרום דק בזווית 20° מעלות. בצפייה של הגל המוחזר רואים אור אדום ($\lambda = 640\text{nm}$). מקדם השבירה של הקרום הוא $n = 1.3$. מהו עובי הקרום? הניחו התאבכות בסדר ראשון.

**(5) טווחים של מספר גל**

נתון אינטרפרומטר של פברי-פרו שבו $R = 0.95$ ו- $d = 0.2\text{mm}$ וזווית הפגיעה קטנה מאוד.

- א. מה הם אורכי הגל λ_m בהם מתקבלים הפיקים?
מהם הערכים k_m המתאימים?
מה המרחק בין הפיקים במונחי k , כלומר מהו Δk בין שני פיקים?
- ב. מהו רוחב הפונקציה (FWHM) כתלות ב- k ?
ומהו הרוחב כתלות בתדר?
- ג. נתונה דוגמית שערך הרזוננס שלה הוא בטווח של:
 $k_r \in [10^3\text{cm}^{-1}, 1.15 \cdot 10^3\text{cm}^{-1}]$
מהו N עבורו ערך הרזוננס נמצא בטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?
- ד. בשביל לסרוק את k אנחנו צריכים לשנות את d .
בכמה צריך לשנות את d בשביל לסרוק את הטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

תשובות סופיות

$$(1) \quad \delta = 2(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1 - n_2)) \quad \text{א.} \quad \Delta\varphi = 2k(L_2 - L_1) \quad \text{ג.} \quad \text{ב. הוכחה.}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \pi$$

$$(2) \quad \text{א. מסלול 3: החזרה במפצל 1 והחזרה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).}$$

$$\text{דרך אופטית - } L_1 + d(n-1) + 2c$$

$$\varphi_3 = k(L_1 + d(n-1) + 2c) + \pi$$

כאשר c הוא הדרך האופטית במפצל.

$$\text{מסלול 4: העברה במפצל 1 והעברה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).}$$

$$\text{דרך אופטית - } L_2 + 2c$$

$$\varphi_4 = k(L_2 + 2c)$$

$$\text{ב.} \quad \frac{I}{I_{\max}} = \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)$$

$$\delta = L_1 - L_2 + d(n-1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad |A_1| = trE_0, |A_2| = rtE_0, |A_3| = r^2E_0, |A_4| = t^2E_0, \quad \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix}$$

$$128\text{mm} \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{א.} \quad \lambda_m = \frac{2d}{m}, \quad k_m = \frac{\pi m}{d}, \quad \Delta k = \frac{\pi}{d}$$

$$\text{ב.} \quad \text{FWHM}_{[K]} = 512 \cdot \frac{1}{m}, \quad \text{FWHM}_{[F]} = 2.44 \cdot 10^{10\text{Hz}}$$

$$\text{ג.} \quad N = 6$$

$$\text{ד.} \quad \Delta d = 28\mu\text{m}$$

תרגילים נוספים

שאלות

1) שני סדקים ברוחב לא זניח

נתונים שני סדקים בעלי רוחב a (שאינו זניח) במרחק d אחד מהשני ובמרחק L מהמסך. הניחו קירוב שדה רחוק וזוויות קטנות.

א. כתבו את הנוסחה המתארת את העוצמה כתלות במרחק ממרכז המסך ביחס לעוצמה המקסימלית. ציינו איזה חלק מהעוצמה הוא פונקציית המעטפת וממה הוא נובע, ואיזה חלק הוא הפונקציה הפנימית (פונקציית המודולציה) וממה הוא נובע.

ב. מהו רוחב פונקציית המעטפת (FWHM) אם נתון שרוחב פונקציית

$$\sin^2(x) \text{ הוא } 2.8 \text{ rad?}$$

ג. כמה מחזורים של הפונקציה הפנימית נכנסים ברוחב פונקציית המעטפת?

ד. על מנת שנוכל להבחין בהתאבכות של שני הסדקים צריך שיהיו לפחות שני פיקים של הפונקציה הפנימית בתוך הרוחב של פונקציית המעטפת, אחרת נראה רק את פונקציית המעטפת. מה התנאי על a ו- d כך שנוכל להבחין בהתאבכות הסדקים.

2) שני סדקים עם קיטובים שונים

בניסוי שני הסדקים מסוים הקיטוב של השדה היוצא מכל סדק שונה ונתון

$$\vec{E}_1 = E_0 \hat{x} \text{ ו- } \vec{E}_2 = E_0 (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$$

הניחו שהמרחק בין הסדקים הוא d והמרחק למסך הוא L ו- $L \gg d$.

א. מה תהיה האמפליטודה של כל אחד מן השדות בפגיעה במרכז המסך? הניחו שהגלים גלילים.

ב. מצאו את השדה השקול והעוצמה במרכז המסך כתלות ב φ .

הסבירו את התוצאות המתקבלות עבור: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ו- $\varphi = \pi$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{I(x)}{I(0)} = \sin^2 \left(\frac{kax}{2L} \right) \cos^2 \left(\frac{kd}{2L} x \right) \quad \text{א.}$$

פונקציית המעטפת היא ה- $\sin c$ בריבוע והיא נובעת מרוחב הסדקים. הפונקציה הפנימית היא הקוסינוס בריבוע והיא נובעת מההתאבכות בין הסדקים.

$$\text{ב. } \frac{L}{ka} 5.6 \quad \text{ג. } 0.89 \frac{d}{a} \quad \text{ד. } d \approx 2.24a$$

$$(2) \quad \text{א. } A_1 = A_2 = \frac{E_0}{\sqrt{L}}$$

$$\text{ב. } E_{tot} = ((1 + \cos \varphi) \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) \quad , \quad I \propto \frac{E_0^2}{L} 4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

ב- $\varphi = 0$ התאבכות מלאה כי השדות באותו קיטוב
 ב- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ השדות מאונכים אין התאבכות, העוצמה הכוללת היא סכום העוצמות.
 ב- $\varphi = \pi$ השדות בפאזה הפוכה, התאבכות הורסת, עוצמה אפס.

מבוא לגלים

פרק 11 - תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום

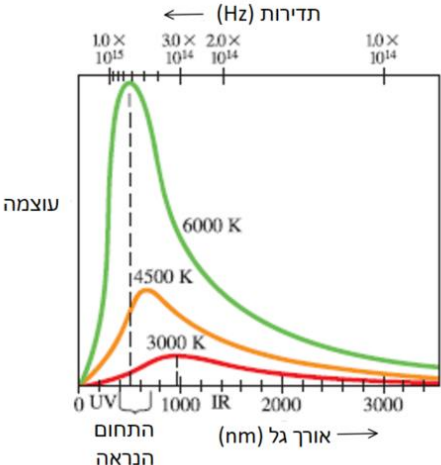
תוכן העניינים

108	1. תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום
111	2. התיאוריה הפוטנית של האור והאפקט הפוטואלקטרי
115	3. אנרגיה מסה ותנע של פוטון
116	4. אפקט קומפטון
118	5. אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות
120	6. דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר
(ללא ספר)	7. סיכום ביניים התורה הפוטונית והשלכות
122	8. מודלים מוקדמים של האטום
123	9. מודל האטום של בוהר
(ללא ספר)	10. סיכום חלק שני מודלים מוקדמים ומודל בוהר
127	11. שאלות ותרגילים נוספים
132	12. בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום:

סיכום כללי:

ההנחה הקוונטית של פלאנק וקרינת גוף שחור.

		גרף של קרינת גוף שחור כתלות באורך הגל ובטמפרטורות שונות
λ_p - אורך הגל בשיא T - הטמפרטורה בקלווין	$\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$	חוק ווין - Wien law
קבוע בולצמן $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ קבוע פלאנק $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$	$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$	נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור
<u>ההנחה הקוונטית של פלאנק</u>	$E_{min} = hf$	אנרגיה מינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום
המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$	$E = nhf$	אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי

שאלות:

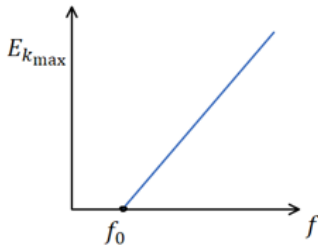
- (1) **דוגמה - טמפרטורת השמש**
הראו באמצעות חוק ווין כי הטמפרטורה על פני השמש היא באמת 6,000K אם ידוע שאורך הגל של האור הנראה הוא בערך 500nm.
- (2) **דוגמה - טמפרטורת כוכב**
טלסקופ גדול בחלל מזהה כוכב חדש. הקרינה שפולט הכוכב נקלטת בטלסקופ כאשר השיא של הקרינה הוא באורך גל של 90nm. מהי הטמפרטורה על פני הכוכב?
- (3) **טמפרטורה של מתכת**
מה הטמפרטורה של מתכת בשלב הריתוך אם שיא פליטת האור שלה באורך גל של 460nm.
- (4) **הפרש אנרגיות של מולקולה רוטטת**
מולקולת HCl רוטטת בתדירות של: $8.1 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. חשבו את ההפרש בין שני ערכים צמודים של האנרגיות האפשריות לפי ההנחה הקוונטית של פלאנק לערכי האנרגיה באוסילציות. תנו תשובה בג'אול ובאלקטרון וולט.
- (5) **חוק ווין וקבוע פלאנק מנוסחת הקרינה**
נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור היא: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$.
א. * הראו, ללא שימוש בחוק ווין, כי קבוע $\lambda_p T$, לעזרתכם פתרון המשוואה: $5e^{-x} = 5 - x$: $x = 4.966$.
ב. השתמשו בחוק ווין וחשבו את קבוע פלאנק.
ג. ** הראו כי הקרינה הנפלטת מגוף שחור פרופורציונית לטמפרטורה ברביעית - חוק סטפן - בולצמן.
הדרכה: בשביל לחשב את הקרינה הכוללת הנפלטת יש לעשות אינטגרציה על כל אורכי הגל, אין צורך לפתור את האינטגרל עד הסוף.

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) 32,000K
- (3) 6,300K
- (4) $5.4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$, 0.34eU
- (5) הוכחה.

התיאוריה הפוטונית של האור והאפקט הפוטואלקטרי:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f - תדירות האור
<u>הניסוי הפוטואלקטרי</u>		
תדירות סף	$hf_0 = W_0$	W_0 - פונקציית העבודה של המתכת
אנרגיה קינטית מקסימאלית של האלקטרונים	$E_k = hf - W_0$	
מתח עצירה	$eV_0 = E_k$	
השוואה לתורה הגלית	<u>לפי התורה הפוטונית</u> - עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא לאנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם. - האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. - רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.	<u>לפי התורה הגלית</u> <u>אלקטרומגנטיות</u> - עוצמת האור קשורה לגודל השדה הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים. - התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

שאלות:

- (1) **דוגמה - חישוב אנרגיית פוטון באור כחול**
חשבו את האנרגיה של פוטון באור כחול: $\lambda = 450\text{nm}$ באוויר (או וואקום).
- (2) **דוגמה - הערכה של מספר פוטונים מנורה**
נסו להעריך כמה פוטונים פולטת נורה בהספק 100W כל שניה.
הניחו שהנצילות של הנורה היא בערך 3% (כלומר רק 3% מהאנרגיה המושקעת בנורה כל שניה מנוצלת להפקה של אור). האור שיוצא מנורה לבנה הוא בכל אורכי הגל, ניתן לקחת לצורך ההערכה את אורך הגל באמצע הספקטרום של האור הנראה: $\lambda \approx 500\text{nm}$.
- (3) **דוגמה - חישוב אנרגיה של אלקטרונים נפלטים**
מהי האנרגיה הקינטית המקסימאלית ומהי המהירות המקסימאלית של אלקטרונים הנפלטים מחומר שפונקציית העבודה שלו היא: $W_0 = 2.8\text{eV}$
אם אורך הגל של האור הפוגע במשטח הוא:
א. $\lambda = 400\text{nm}$
ב. $\lambda = 600\text{nm}$
- (4) **עקיפה של קרינת גמא**
לפוטון בקרינת גמא יש אנרגיה של 380keV .
א. מהו אורך הגל של הקרינה?
ב. האם לדעתך הקרינה עושה עקיפה דרך פתחים טיפוסיים שאנחנו נתקלים ביום יום כמו פתח של דלת?
- (5) **איזו מתכת לא תפלוט אלקטרונים**
פונקציות העבודה של סודיום, צסיום, נחושת וברזל הן: $2.1, 2.3, 4.5$ ו- 4.7 eV.
אלקטרון וולט בהתאמה. אלו מהמתכות לא תפלוט אלקטרונים כאשר פוגע בה אור מהתחום הנראה?
- (6) **פונקציית עבודה ומתח עצירה**
בניסוי של האפקט הפוטואלקטרי נצפה כי לא זורם זרם כאשר אורך גל של האור הוא מעל ל- 540nm .
א. מהי פונקציית העבודה של המתכת?
ב. מהו מתח העצירה הדרושה אם מקרינים באור באורך גל של 450nm ?

(7) ניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי הקרינו אור בתדירויות שונות ומדדו את מתח העצירה. התוצאות של הניסוי מוצגות בטבלה הבאה:

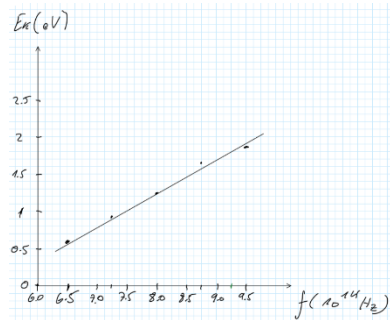
$f(10^{14}\text{Hz})$	$V(V)$
6.50	0.6
7.25	0.91
8.00	1.23
8.75	1.54
9.50	1.85

- א. מצאו את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים בפליטה ושרטטו גרף של אנרגיה זו כתלות בתדירות. השתמשו בנייר משבצות ורשמו נתונים בצורה מדויקת.
- ב. חשבו מתוך הגרף את קבוע פלאנק.
- ג. חשבו את פונקציית העבודה ותדירות הסף של המתכת.

תשובות סופיות:

- (1) 2.8eV
- (2) $8 \cdot 10^{18}$ פוטונים.
- (3) א. $3.2 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. לא תהיה פליטה של אלקטרונים.
- (4) א. $3.3 \cdot 10^{-3} \text{nm}$ ב. לא.
- (5) נחשת וברזל.
- (6) א. 2.3eV ב. 0.46V
- (7) א.

ב. הוכחה.



$E_k = \text{eV}$
0.6eV
0.91eV
1.23eV
1.54eV
1.85eV

ג. $W_0 = 2.42\text{eV}$, $f = 5.84 \cdot 10^{14} \text{Hz}$

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f -תדירות האור
תנע של פוטון	$p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$	
מסת מנוחה של פוטון	$m = 0$	

שאלות:

- (1) דוגמה - כוח שמפעילה נורה על נייר שחור
בדוגמה "הערכה של מספר הפוטונים מנורה" חישבנו את מספר הפוטונים שיוצאים מנורה של 100W כל שניה (בערך 10^{19}). נניח כי כל הפוטונים האלו פוגעים בנייר שחור (ולא מוחזרים) חשבו את:
א. התנע של פוטון יחיד.
ב. הכוח שמפועל על הנייר.

- (2) דוגמה - יעילות של תהליך פוטוסינתטי
בתהליך פוטוסינתטי פיגמנטים בצמח כמו כלורופיל סופגים אור שמש ובאמצעותו הופכים פחמן דו חמצני (CO_2) לפחמימות (וחמצן שנפלט).
בשביל להפוך מולקולה אחת של CO_2 לפחממה הצמח משתמש ב-9 פוטונים. כלורופיל סופג אור בעיקר באורך גל של 670nm. אם ידוע שהאנרגיה המשתחררת בפירוק פחממה היא: $4.9 \frac{eV}{molecule}$, מה היעילות (או נצילות) של התהליך הפוטוסינתטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. $1.3 \cdot 10^{-27} \frac{kg \cdot m}{sec}$ ב. $10^{-8} N$
(2) 29%

אפקט קומפטון:

סיכום כללי:

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי	$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$	הסחת קומפטון
--	--	--------------

שאלות:

(1) דוגמה - פיזור בכמה זוויות

קרני X באורך גל 0.162nm מפוזרות מסרט פחמן דק. מה יהיו אורכי הגל של הקרניים המפוזרות בזוויות?

- א. 0°
 ב. 90°
 ג. 180°

(2) הסחה יחסית מקסימאלית

בפיזור קומפטון, מצאו את זווית הפיזור עבורה ההסחה (שינוי באורך הגל) היא מקסימאלית. מהי ההסחה היחסית המקסימאלית $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ עבור פוטון באורך גל: $\lambda = 500\text{nm}$ מהתחום הנראה ועבור פוטון באורך גל: $\lambda = 0.1\text{nm}$ מתחום קרינת X.

(3) פיזור רב פעמי

קרני גמא שנוצרות קרוב למרכז השמש עוברות הרבה פיזורים בזוויות קטנות עד שהן מאבדות מספיק אנרגיה והופכות לקרניים בתחום הנראה. הניחו שלפוטון בקרן גמא יש אנרגיה של 1.0MeV והפוטון עובר סדרה של התנגשויות בזוויות של 0.5° בכל התנגשות. כמה התנגשויות צריך הפוטון לעבור בשביל שאורך הגל שלו ישתנה ל-555nm.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.162nm ב. 0.164nm ג. 0.167
- (2) א. $\theta = \pi$ ב. 0.00097% ג. 4.9%
- (3) $6 \cdot 10^9$ התנגשויות.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

סיכום כללי:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

שאלות:

- (1) דוגמה - אנרגיה מינימלית ליצירת זוגות
מצאו מהי האנרגיה המינימלית (ב-eV) ליצירת זוג אלקטרון פוזיטרון?
מה אורך הגל של הפוטון במקרה זה?
- (2) חישוב אנרגיה קינטית ביצירת זוג
חשבו כמה אנרגיה קינטית כוללת תהיה ביצירת זוג של אלקטרון פוזיטרון מתוך פוטון בעל אנרגיה של: 2.8 MeV.
- (3) אורך גל מקסימאלי ליצירת זוג
מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון היכול לייצר זוג של פרוטון ואנטי פרוטון (כל אחד במסה של: $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$).
- (4) אלקטרון ופוזיטרון מייצרים שני פוטונים
אלקטרון ופוזיטרון נעים אחד כלפי השני במהירות: $10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ כל אחד. הם מתנגשים, נעלמים ויוצרים שני פוטונים שנעים בכיוונים מנוגדים. מהן האנרגיה והתנע של כל פוטון?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 1.02\text{MeV} \text{ ו- } 1.2\text{pm}$$

$$(2) \quad 1.78\text{MeV}$$

$$(3) \quad 6.63 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

$$(4) \quad p = 0.51 \frac{\text{MeV}}{c}, \quad E = 0.51\text{MeV}$$

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

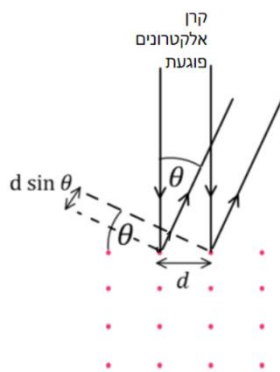
סיכום כללי:

$p = mv$ או $p = mv\gamma$	לא יחסותי או יחסותי	$\lambda = \frac{h}{p}$	אורך גל דה ברולי של חלקיק
----------------------------------	---------------------------	-------------------------	------------------------------

שאלות:

(1) דוגמה - אורך גל של כדורסל
חשבו את אורך גל דה ברולי של כדורסל השוקל חצי קילוגרם ונזרק במהירות של 10 מטר לשנייה.

(2) דוגמה - אורך גל של אלקטרון ב-100 וולט
חשבו את אורך הגל של אלקטרון המואץ תחת הפרש פוטנציאלים של 100V.



(3) דוגמה - עקיפה של אלקטרונים
מקרינים קרן אלקטרונים בניצב למשטח של חומר מוצק. האטומים בחומר מסודרים בצורת סריג ריבועי כאשר המרווח בין האטומים לא ידוע ומסומן ב- d , ראו איור. מצאו את המרחק d אם האנרגיה הקינטית של האלקטרונים היא: $E_k = 80\text{eV}$ והזווית בה מתרחשת התאבכות בונה בפעם הראשונה היא 22° . הניחו שהאנרגיה של האלקטרונים נמוכה וכי האלקטרונים עושים אינטראקציה רק עם השכבה החיצונית של החומר.

(4) כמה מתח לאורך גל
באיזה מתח צריך להאיץ אלקטרון כך שהוא יגיע לאורך גל של 0.6nm.

(5) אנרגיה ותנע מאורך גל
לאלקטרון אורך גל דה ברולי של: $\lambda = 3.2 \cdot 10^{-10}\text{m}$.
א. מהו התנע שלו?
ב. מהי מהירותו? האם היא יחסותית? רמת דיוק של 1% בגאמה.
ג. איזה מתח נדרש כדי להאיץ אותו למהירות כזו?

(6) רזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני

מהו הגבול התיאורטי של הרזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני שבו האלקטרונים מואצים במתח של 80 kV . יש להשתמש בנוסחאות יחסיות.

(7) אנרגיה יחסית

אלקטרון בשפופרת טלויזיה (של פעם) מואץ במתח של 33 keV .
א. האם האנרגיה של האלקטרון יחסית? לפי רמת דיוק של אחוז אחד בגמא.
ב. חשבו את אורך הגל של האלקטרון. האם צריך לדאוג מתופעות עקיפה? גודל פתח השפופרת הוא 5 cm .

תשובות סופיות:

- (1) $1.3 \cdot 10^{-34}\text{ m}$
- (2) $1.2 \cdot 10^{-10}\text{ m}$
- (3) 3 A
- (4) 4.17 V
- (5) א. $2.1 \cdot 10^{-24}\text{ kg} \cdot \text{sec}$. ב. $2.3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, לא יחסית. ג. 15 V
- (6) $4.2 \cdot 10^{-12}\text{ m}$
- (7) א. כן. ב. $6.6 \cdot 10^{-12}\text{ m}$, אין צורך.

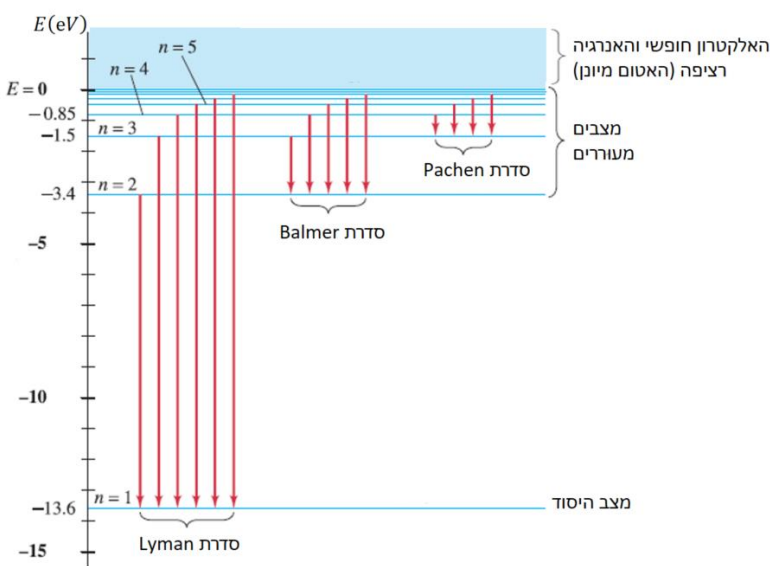
מודלים מוקדמים של האטום:

סיכום כללי:

קבוע Rydberg $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	נוסחה לאורכי הגל הנפלטים מאטום המימן $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	
1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד. 2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.		בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד

מודל האטום של בוהר:

סיכום כללי:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים / רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים אורביטלים .		הנחות המודל
2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים stationary states אלו הם נקראים מצבים יציבים		
	$hf = E_U - E_L$	אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים
$n=1,2,3\dots$	$L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$	הנחה על התנע הזוויתי
Z - מספר הפוטונים $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$	$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$	הרדיוסים האפשריים
	$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6eV}{n^2}$	האנרגיה של האלקטרון הנמצא במסלול ה- n
		טבלה של רמות האנרגיה באטום המימן

שאלות:

- (1) **דוגמה - אורך הגל של הקו הראשון של Paschen**
השתמשו בטבלה שהוצגה בסרטון "קווי הספקטרום ממודל בוהר" ומצאו את אורך הגל של קו הספקטרום הראשון בסדרת Paschen. באיזה תחום של אורכי גל נמצא קו זה? (IR, UV או אור נראה).
- (2) **דוגמה - אורך גל מקסימלי בבליעה**
גז מימן נמצא בשפופרת בלחץ נמוך ובטמפרטורת החדר (האלקטרונים במצב היסוד). מקרינים את הגז בקרינה עם ספקטרום רציף של אורכי גל. מהו אורך הגל הכי גבוה בספקטרום הבליעה ומהו אורך הגל אחריו? השתמשו בטבלה של רמות האנרגיה באטום המימן.
- (3) **דוגמה - אנרגיית יון של יון הליום**
 He^+ הוא יון של הליום המכיל שני פרוטונים ואלקטרון אחד. השתמשו במודל בוהר וחשבו את אנרגיית היינון של He^+ , כלומר, כמה אנרגיה דרושה בשביל לנתק גם את האלקטרון היחיד שנשאר. מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון הגורם ליינון? הניחו שהאלקטרון במצב היסוד.
- (4) **דוגמה - אנרגיה של אטומים בטמפרטורת חדר**
לפי התיאוריה הקינטית (תיאוריה בתרמודינמיקה), האנרגיה הקינטית הממוצעת של אטום בגז (אידיאלי) היא: $\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$ כאשר $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$. הוא קבוע בולצמן ו-T היא הטמפרטורה בקלווין. הסבירו מדוע בטמפרטורת החדר כמעט כל האטומים צריכים להיות במצב היסוד. (טמפרטורת החדר היא בערך 20 מעלות צלזיוס והטמפרטורה בקלווין שווה לטמפרטורה בצלזיוס פלוס 273).
- (5) **השוואה בין מעברים**
נתונים שלושה מעברים בין רמות אנרגיה של אטום המימן לפי מודל בוהר כאשר n הוא המצב ההתחלתי ו-n' הוא המצב הסופי.
I. $n = 1 \quad n' = 3$
II. $n = 6 \quad n' = 2$
III. $n = 4 \quad n' = 5$
א. קבעו אילו מן המעברים הם בליעה ואילו פליטה.
ב. באיזה מעבר מעורב הפוטון הכי אנרגטי?

- (6) **יינון אטום מעורר**
כמה אנרגיה דרושה על מנת ליינן אטום מימן מעורר הנמצא במצב אנרגיה החמישי?
- (7) **אורך גל של הקו השני**
מצאו את אורך הגל של הקו השני בסדרת בלמר.
- (8) **מימן בולע פוטון של הליום מיונן**
בשמש ישנם יונים של הליום - He^+ . יון של ההליום פולט פוטון במעבר מרמה 5 לרמה 2. האם אטום מימן הנמצא בשמש יוכל לבלוע את הפוטון בלי לבצע יינון? אם כן בין איזה רמות אנרגיה תתבצע הבליעה?
- (9) **אנרגיית יינון של ליתיום פלוס שתיים**
חשבו את אנרגיית היינון (ממצב הייסוד) של אטום ליתיום החסר שני אלקטרונים Li^{2+} בעל $Z = 3$ לפי מודל בוהר.
- (10) **אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב יסוד**
מהי האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של אלקטרון במצב היסוד של אטום המימן?
- (11) **האם אטום המימן יחסותי**
השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם "אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב ייסוד" ובדקו האם יש צורך להשתמש בנוסחאות יחסותיות במודל בוהר.
- (12) **רדיוס אטום מעורר**
אטום מימן מעורר יכול להיות תיאורטית בקוטר של 0.10mm. באיזה רמת אנרגיה נמצא אטום זה? ומהי האנרגיה של מצב זה?
- (13) **אנרגיה ותנז**
מצאו את התנע הזוויתי של אלקטרון באטום המימן אם האנרגיה שלו היא -1.5eV .
- (14) **אלקטרונים פוגעים בגז מימן**
קרן אלקטרונים בעלי אנרגיה של 12.1eV פוגעת בגז מימן הנמצא בטמפרטורת החדר (רוב האטומים במצב היסוד). מהו ספקטרום הפליטה שנצפה לראות מן הגז בעקבות פגיעת הקרן?

תשובות סופיות:

- (1) 300nm בתחום העל סגול (UV).
- (2) $\lambda_{\max} = 122\text{nm}$, $\lambda_2 = 103\text{nm}$.
- (3) 22.8nm
- (4) ראה סרטון.
- (5) א. בליעה: I, פליטה: II, בליעה: III. ב. מעבר I.
- (6) 0.544eV
- (7) 490nm
- (8) לא יוכל לקלוט.
- (9) 122.4eV
- (10) $K = 13.6\text{eV}$, $U = -27.2\text{eV}$
- (11) אין צורך.
- (12) ברמה ה-972, האנרגיה היא: $-1.4 \cdot 10^{-J} \text{eV}$.
- (13) $3.17 \cdot 10^{-34} \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$
- (14) אורכי הגל הנצפים הם: 103nm, 656nm, 122nm.

שאלות ותרגילים נוספים:

שאלות:

- (1) **טמפרטורה של כוכב**
איזה כוכב נמצא בטמפרטורה גבוהה יותר, כוכב הנראה כחול, אדום או צהוב?
- (2) **גופים שחורים בחושך**
אם קרינה נפלטת מכל גוף, למה אנחנו לא רואים אותם בחושך?
- (3) **צבע אור של נורה**
האם האור של נורה בטמפרטורה של 3000K יראה לבן כמו האור של השמש הנמצאת ב-6000K?
- (4) **חדר חושך**
למה בחדרי חושך מאירים בנורה אדומה כשמפתחים תמונה של שחור לבן? האם ניתן להשתמש באור אדום גם בפיתוח של תמונה בצבע?
- (5) **תדירות סף מעדיפה תיאוריה פוטונית**
הסבירו למה העובדה שיש תדירות סף באפקט הפוטואלקטרי מסתדרת עם התורה הפוטונית ולא עם התורה הגלית של האור?
- (6) **אנרגיה של אינפרה אדום לעומת על סגול**
א. האם לפוטון יחיד של קרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מפוטון יחיד של קרן בתחום האינפרה אדום?
ב. האם לקרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מקרן בתחום האינפרה אדום?
- (7) **האם נפלטים יותר אלקטרונים באורך גל נמוך**
מקרינים מתכת באמצעות אור באורך גל מסוים ומודדים את האנרגיה של האלקטרונים הנפלטים. מחליפים את הקרן האור לקרן אחרת, באותה העוצמה אך עם אורך גל גדול יותר. בהנחה שבשני המקרים נפלטים אלקטרונים מן המתכת:
א. האם מספר האלקטרונים הנפלט גדל / קטן או נשאר ללא שינוי?
ב. האם האנרגיה של האלקטרונים גדלה / קטנה או נשארת ללא שינוי?

- (8) **אורך גל של פוטון בפיזור**
 האם אורך הגל של פוטון בקרינת X המפוזר מאלקטרון גדל / קטן או לא משתנה?
- (9) **הבדל בין הפוטואלקטרי לקומפוטון**
 באפקט קומפוטון הפגיעה של הפוטון יכולה לגרום ליציאה של אלקטרון מהמתכת, במקרה כזה מה ההבדל בינו לאפקט הפוטואלקטרי?
- (10) **איך העוצמה יורדת עם המרחק לפי כל מודל**
 נניח כי ישנו מקור אור נקודתי, כיצד צריכה לרדת העוצמה של האור כתלות במרחק מהמקור לפי המודל הפוטוני וכיצד לפי המודל הגלי.
 האם ניתן להבחין בין המודלים בדרך זו?
- (11) **מהם ההבדלים בין פוטון לאלקטרון**
 ציינו את כל ההבדלים בין פוטון לאלקטרון.
- (12) **האם יש חמצן על כוכב**
 כיצד ניתן לדעת האם יש חמצן על פני השמש או על כוכבים בכלל?
- (13) **נכונות הנוסחה של אנרגיית הפוטון**
 השתמשו בשימור תנע והראו כי לפוטון הנפלט מאטום המימן יש קצת פחות אנרגיה מאשר החישוב שבנוסחה: $hf = E_U - E_L$.
- (14) **ספקטרום בליעה ופליטה בטמפרטורות שונות**
 נניח שניקח את ספקטרום הפליטה של גז מימן הנמצא בטמפרטורה מאוד גבוהה כך שחלק מהאטומים נמצאים במצב מעורר ונעביר אותו דרך גז מימן הנמצא בטמפרטורה החדר (האטומים לא מעוררים) כך שתתבצע בליעה.
 האם קווי הבליעה יהיו זהים לקווי הפליטה?
- (15) **אנרגיה מקסימלית להתנגשות אלסטית**
 מהי האנרגיה המקסימאלית עבורה יתנגשו שני אטומי מימן הנמצאים במצב היסוד להתנגשות אלסטית?

(16) כמה פוטונים נכנסים לעין מנורה

נורה של 40W פולטת בערך 3% מהאנרגיה המושקעת בה כאור נראה באורך גל ממוצע של 550nm. האור נפלט בצורה אחידה לכל הכיוונים. העריכו כמה פוטונים פוגעים בעין של אדם הנמצא במרחק 10m מהנורה בכל שניה. קוטר האישון הוא 4.0mm.

(17) כמה פוטונים מגיעים מהשמש

עוצמת האור המגיע מן השמש היא: $I = 1350 \frac{W}{m^2}$. חשבו כמה פוטונים למטר מרובע לשנייה יש פוגעים בפני כדור הארץ מן השמש? קחו אורך גל ממוצע של 550nm.

(18) כוח של קרן לייזר

קרן לייזר באורך גל של: $\lambda = 633nm$ פוגעת בחיישן כוח. החיישן מודד כוח של: $F = 3.0nN$. כמה פוטונים פוגעים בחיישן כל שניה אם נניח שהפוטונים אינם מוחזרים?

(19) חלקיקי אלפא מתקרבים לגרעין

בחלק מהניסויים של רתפורד הוא השתמש בחלקיקי אלפא בעלי מטען $+2e$ עם אנרגיה של 3.6MeV. כמה קרוב יכלו החלקיקים להגיע למרכז גרעין של כסף המכיל מטען של $+47e$. התעלמו מהרתע של הגרעין.

(20) פוטנציאל עצירה בניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי מקרינים מתכת באור באורך גל 440nm ומודדים כי פוטנציאל העצירה הוא 1.2V. מה יהיה פוטנציאל העצירה אם יחליפו את האור לאורך גל של 550nm.

(21) שינוי תדירות בפוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי פוטונים באנרגיה של 9.0eV פוגעים במתכת ומתח העצירה הנמדד הוא 5.0V.
 א. מה תהיה האנרגיה המקסימאלית של האלקטרונים הנפלטים אם תדירות הפוטונים תקטן לחצי מהתדירות המקורית?
 ב. חזרו על סעיף א אם התדירות תקטן לשליש מהתדירות המקורית.

22) מודל בוהר לשמש וכדור הארץ

נסו ליישם את המודל של בוהר לכדור הארץ והשמש.

א. מהם הרדיוסים ורמות האנרגיה? יש להשתמש ב:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2 \text{kg}}, M_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}, M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$$

ב. חשבו את רמת האנרגיה שבה נמצא כדור הארץ אם המרחק מהשמש

$$\text{הוא: } r = 1.50 \cdot 10^{11} \text{m}$$

ג. * הראו כי ההבדל בין רמות האנרגיה זניח עבור מודל זה וניתן להתייחס לאנרגיה כרציפה.

23) כוח על פנס

פנס קטן עובד בהספק של 5W כאשר כ-3% מנוצל לאור נראה. העריכו את הכוח המופעל על הפנס אם האור יוצא בכיוון אחד.

24) זמן ואורך פלאנק

נסתכל על שלושה קבועים בסיסיים בטבע קבוע הגרביטציה:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}}, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}$$

$$\text{ומהירות האור: } c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

א. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של זמן. זמן זה נקרא זמן פלאנק t_p והוא נחשב לזמן המוקדם ביותר מרגע תחילת הייקום שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את זמן זה.

ב. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של אורך. אורך זה נקרא אורך פלאנק λ_p והוא נחשב לאורך הקטן ביותר שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את אורך זה.

תשובות סופיות:

- (1) כחול.
- (2) כי הקרינה הנפלטת היא לא בתחום הנראה.
- (3) לא, הוא יראה יותר צהוב אדום.
- (4) כי סרט שחור לבן לא מגיב לאור אדום, לא ניתן להשתמש באור אדום לפיתוח תמונה צבעונית.
- (5) לפי התורה הגלית האנרגיה של האור קשורה לעוצמת האור ולפי התורה הפוטונית לתדירות.
- (6) א. כן. ב. לא.
- (7) א. ללא שינוי. ב. קטנה.
- (8) גדל.
- (9) באפקט קומפטון הפוטון מפוזר באנרגיה יותר נמוכה לעומת הפוטואלקטרי שם תמיד כל הפוטון נבלע וכל האנרגיה שלו הולכת לאלקטרון.
- (10) לפי אחד חלקי המרחק בריבוע בשניהם ואי אפשר להבחין ביניהם.
- (11) משותף: תנע - לשניהם יש, דואליות גל חלקיק לשניהם (לשניהם יש אורך גל). שונה: פוטון נע רק במהירות האור, לפוטון אין מסת מנוחה, לפוטון אין מטען חשמלי.
- (12) לפי ספקטרום הפליטה.
- (13) ראה סרטון.
- (14) לא.
- (15) 10.2eV.
- (16) 10^{10} .
- (17) $3.7 \cdot 10^{21}$ פוטונים.
- (18) $2.9 \cdot 10^8$ פוטונים לשנייה.
- (19) $3.76 \cdot 10^{-14} \text{ m}$.
- (20) 0.64V.
- (21) א. 0.5eV. ב. לא תהיה פליטת אלקטרונים.
- (22) א. $r_n = 2.34 \cdot 10^{-138} \cdot n^2$, $E_n = -1.68 \cdot 10^{182} \cdot \frac{1}{n^2}$. ב. $n = 2.53 \cdot 10^{74}$.
- (23) ג. ראה סרטון. $5 \cdot 10^{-10} \text{ N}$.
- (24) א. $t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1.35 \cdot 10^{-43} \text{ sec}$. ב. $\lambda_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.05 \cdot 10^{-35} \text{ m}$.

בעיית שני הגופים ומסה מצומצמת

רקע

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r}_{rel} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

שאלות

1) אטום פוזיטרוניום

אטום פוזיטרוניום הוא אטום המורכב מאלקטרון וגרעין שבו יש פוזיטרון. פוזיטרון הוא אנטי חלקיק של האלקטרון, כלומר מסתו זהה למסת האלקטרון ומטענו $+e$.

מהי האנרגיה של פוטון הנפלט במעבר מרמה $n=3$ לרמה $n=1$?

תשובות סופיות

6 eV (1)

מבוא לגלים

פרק 12 - תורת הקוונטים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 133

פונקציית הגל של החומר:

סיכום כללי:

- $|\psi(x)|$ היא פונקציית הגל של החומר.
- $|\psi(x)|^2$ היא צפיפות ההסתברות למצא חלקיק בנקודה מסוימת.
- ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא: $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$.
- נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.
- כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
- מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$.
- המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).
- שונות: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ כאשר $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$.

שאלות:

- (1) דוגמה – חישוב הסתברות לדעיכה אקספוננציאלית
פונקציית הגל של חלקיק היא $4e^{-8x}$ עבור $x > 0$ ואפס עבור $x < 0$.
מה הסיכוי למצא את החלקיק ב- $x > 0.03$.

(2) דוגמה – מצאו את המקדם

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A \sin(20\pi x) & 0 \leq x \leq 0.05 \\ 0 & x > 0.05 \end{cases}$$

נתונה פונקציית הגל הבאה של חלקיק: $0 \leq x \leq 0.05$

מצאו את הקבוע A .

(3) דוגמה – מצאו משתנים

נתונה פונקציית גל מנורמלת לחלקיק בעל מסה M : $\psi(x) = Ae^{-\alpha(x-x_0)^2}$. מצאו את:

א. A .ב. $\langle x \rangle$.

ג. המיקום המסתבר ביותר.

ד. $\langle x^2 \rangle$.ה. Δx .

לעזרתכם: $\int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{16b^3}}$; $\int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}$

תשובות סופיות:

(1) 38%.

(2) $A = 2\sqrt{10}$.

(3) א. $A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$ ב. x_0 ג. x_0 .

ד. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{4}} + x_0^2$ ה. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{8}}$.

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

סיכום כללי:

הערות		
1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית. 2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד. 3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.	$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot S$	אי ודאות מיקום תנע
1. ככל שמודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן. 2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.	$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$	אי ודאות זמן אנרגיה
	$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$	אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי

שאלות:

(1) דוגמה – מדידת מיקום

אלקטרון נע במהירות: $2.10 \cdot 10^6 \frac{m}{sec}$ שנמדדה בדיוק של 0.12%.
מה הדיוק המקסימאלי שניתן להשיג במדידה סימולטנית של המיקום?

(2) דוגמה – אי וודאות של טניס

מה היא אי הוודאות במדידת המיקום של כדור טניס בעל מסה של 150 גרם הנזרק במהירות: $35 \pm 2 \frac{m}{sec}$?

(3) אי ודאות במיקום נויטרון שנע

נויטרון נע במהירות: $(6.650 \pm 0.023) \cdot 10^5 \frac{m}{sec}$.
באיזו רמת דיוק ניתן לדעת את המיקום שלו? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$

(4) אנרגיה במצב מעורר

אלקטרון נשאר במצב מעורר באטום בערך $10^{-8} sec$.
מה אי הוודאות באנרגיה של המצב באלקטרון וולט?

(5) אי ודאות יחסית בפליטת פוטון

זמן החיים של אטום במצב מעורר הוא בערך 10^{-9} sec . האטום יורד מהמצב המעורר ופולט פוטון באורך גל של 400 nm , מצאו את אי הודאות היחסית באנרגיית הפוטון $\frac{\Delta E}{E}$ ובאורך הגל $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$.

(6) אי ודאות בשל קליע באקדח

קליע בעל מסה של 5 gr נורה מאקדח במהירות אופקית של $180 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
 א. מהו אורך הגל של הקליע?
 ב. מהי אי הודאות המינימלית במדידת המיקום של הקליע?
 ג. מהי אי הודאות המינימלית בתנע בכיוון האנכי של הקליע אם רדיוס הקנה הוא 0.60 cm ?

(7) אי ודאות במסת נויטרון

לנויטרון חופשי: $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ יש זמן חיים של 886 sec .
 מה אי הודאות במדידת המסה של הנויטרון (בק"ג)?

(8) אלקטרון יורד מצב באטום המימן

אלקטרון נמצא במצב המעורר הראשון ($=2n$) של אטום המימן בממוצע 10^{-8} sec לפני שהוא יורד למצב הייסוד ($=1n$).
 א. העריכו את אי הודאות באנרגיית האלקטרון במצב $=2n$.
 ב. מהי אי הודאות היחסית באנרגיית הפוטון הנפלט?
 ג. מהו אורך הגל ורוחב הפס של קו הספקטרום הנצפה מתהליך זה?

תשובות סופיות:

$$\Delta X \text{ min} = 2.3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (1)$$

$$1.8 \cdot 10^{-34} \text{ m} \quad (2)$$

$$1.37 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (3)$$

$$3 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 4 \cdot 10^{-5} \% , \quad \left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = 4 \cdot 10^{-5} \% \quad (5)$$

$$7.4 \cdot 10^{-34} \text{ m} \quad \text{א.} \quad 10^{-32} \text{ m} \quad \text{ב.} \quad 10^{-32} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג.} \quad (6)$$

$$10^{-51} \text{ kg} \quad (7)$$

$$3 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \quad \text{א.} \quad 3 \cdot 10^{-9} \quad \text{ב.} \quad \lambda = 122 \text{ nm} , \quad |\Delta \lambda| \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ nm} \quad \text{ג.} \quad (8)$$

משוואת שרדינגר:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t)\Psi(x, t)$$

תנאים נוספים:

1. פסי מנורמלת.
2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת.
3. פסי רציפה.
4. הגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(x, y, z, t) + U(x, t)\Psi(x, y, z, t)$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

כאשר: $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

- התרגילים של נושא זה מופעים בנושאים הבאים.

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל:

סיכום כללי:

חלקיק חופשי – חלקיק שנע ללא השפעת כוחות: $U(x) = 0$.
 פונקציית הגל של חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$.
 חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$.

בור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל של המצב ה- n : $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

האנרגיה של המצב ה- n : $E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2, n=1, 2, 3, \dots$

- לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה הפוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית.

עקרונות לציור פונקציית גל:

1. ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
2. עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
3. ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).
4. פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
5. פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$

המיקום בעל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שאלות:

- (1) **דוגמה – אלקטרון חופשי עם אנרגיה ידועה**
אלקטרון עם אנרגיה $E = 3.7\text{eV}$ נע באופן חופשי במרחב.
א. מהו אורך הגל של האלקטרון?
ב. רשמו את פונקציית הגל של האלקטרון.
אין צורך לנרמל את הפונקציה והניחו כי הפאזה היא אפס.
- (2) **דוגמה – אלקטרון באמצע הקופסה**
אלקטרון נמצא במצב היסוד בתוך קופסה קשיחה באורך l .
מצאו את ההסתברות שהאלקטרון נמצא במרחק $\frac{l}{8}$ ממרכז הקופסה (מימין או משמאל למרכז).
- (3) **דוגמה – מיקום ממוצע ומסתבר במצב המעורער הראשון**
מצאו את המיקום הממוצע והמיקום המסתבר ביותר עבור חלקיק הנמצא במצב המעורער הראשון בתוך קופסה קשיחה באורך: $2.00 \cdot 10^{-10}\text{m}$.
- (4) **דוגמה – חיידק בקופסה**
חיידק קטן בעל מסה של 10^{-13}kg מוגבל לזוז בין שני קירות קשיחים במרחק 0.1mm אחד מן השני.
א. האריכו את המהירות המינימאלית של החיידק.
ב. אם מהירות החיידק היא בערך $10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, מהו המספר הקוונטי של המצב בו נמצא החיידק?
- (5) **דוגמה – חלקיק בבור סופי**
חלקיק בעל מסה M נמצא בבור פוטנציאל הנתון לפי הפונקציה הבאה:
- $$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$
- אנרגיית החלקיק E נתונה וקטנה מ- U_0 .
- א. מצאו את פונקציית הגל בכל המרחב ללא מציאת המקדמים הקבועים של הפונקציה בכל תחום.
ב. השתמשו בתנאי השפה (פונקציית הגל רציפה והנגזרת רציפה) בשביל למצא משוואה ממנה ניתן לחשב את הערכים האפשריים של האנרגיה. הראו כי מתקיים הקשר:

$$\tan(kL) = -\frac{k}{\alpha} \quad \text{כאשר} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

ג. מצאו מהו תחום הערכים האפשריים של kL והראו כי :

$$|\sin(kL)| = \frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}}$$

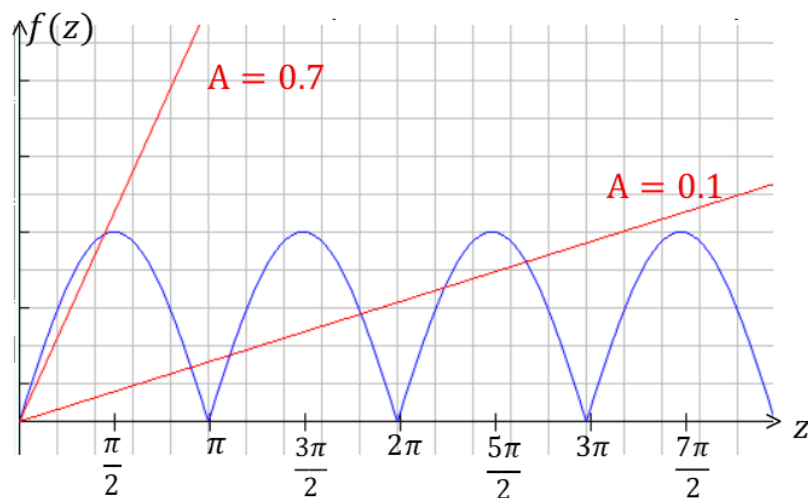
ד. כתבו את המשוואה של סעיף ג' באמצעות המשתנים : $z = kL$

ו- $A = \frac{\hbar}{L\sqrt{2mU_0}}$ כעת ניתן לפתור את הבעיה באמצעות פתרון גרפי.

הפתרונות הן נקודות החיתוך של הפונקציות משני צידי המשוואה.

סמנו את נקודות הפתרון בגרף הבא עבור : $A = 0.1$ ו- $A = 0.7$.

הקפידו על תחום ההגדרה של סעיף ג'.



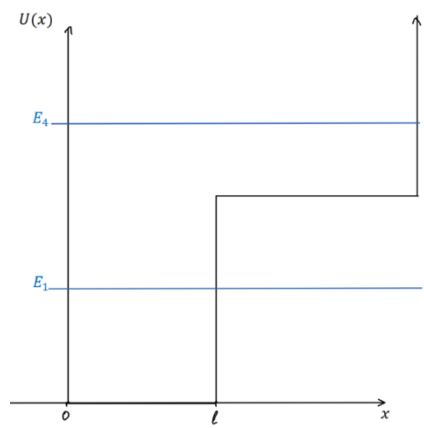
ה. מהו התנאי על A עבורו אין פתרון למשוואה?

מה המשמעות הפיזיקאלית של מצב זה?

6) דוגמה – בור אינסופי עם מדרגה

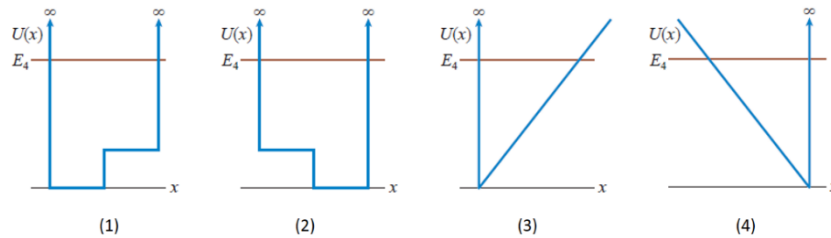
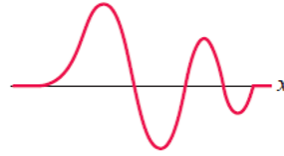
באיור נתונה פונקציית פוטנציאל של בור פוטנציאל אינסופי עם מדרגת

פוטנציאל. ציירו את פונקציית הגל עבור האנרגיות E_1 ו- E_4 באיור.



דוגמה – התאימו פוטנציאל לפונקציית הגל

איזה מהגרפים הבאים מתאר את הפוטנציאל של פונקציית הגל הבאה:



תשובות סופיות:

(1) א. $6.38 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ב. $\psi(x) = A \sin(9.84 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \cdot x)$

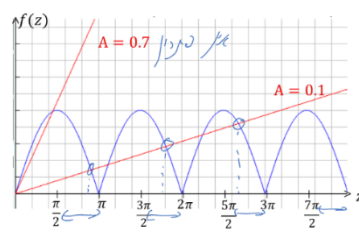
(2) 47.5%

(3) ממוצע: $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$, מסתבר: $\frac{l}{4}$, $\frac{3l}{4}$

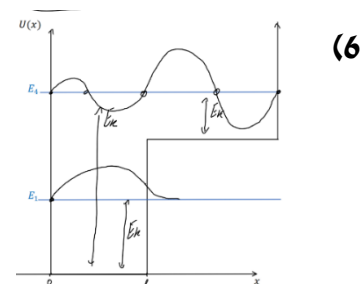
(4) א. $3 \cdot 10^{-17} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. $3 \cdot 10^{-10}$

(5) א. $\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{-\alpha x} & 0 < x < L \end{cases}$ כאשר: $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$ ו- $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

ב. הוכחה. ג. $\frac{\pi}{2} + \pi n < KL < \pi + \pi n \quad n = 0, 1, 2, \dots$



ד. $|\sin(z)| = Az$ ה.



(7) 4

מנהור (tunneling):

סיכום כללי:

ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום. l - אורך המחסום $T \ll 1$ רק עבור	$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$ $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$	מקדם ההעברה
	$R = 1 - T$	מקדם החזרה

שאלות:

(1) דוגמה – אלקטרון חודר מחסום

אלקטרון חופשי בעל אנרגיה של 40eV נע במרחב ונתקל במחסום פוטנציאל בעל אנרגיה של 60eV. מה ההסתברות שהאלקטרון יעבור את המחסום אם עובי המחסום הוא:

א. 1.0nm
ב. 0.1nm

(2) נתונים של אלקטרון חופשי

פונקציית הגל של אלקטרון חופשי היא: $\psi(x) = A \sin(\pi \cdot 10^{10} x)$ כאשר x במטרים. מצאו את:

א. אורך הגל והתנע של האלקטרון.
ב. מהירות האלקטרון.
ג. אנרגיית האלקטרון.

(3) מהירות מינימלית בבור אינסופי

מהי המהירות המינימלית של אלקטרון הנמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב 0.30nm?

(4) אי ודאות במצב היסוד*

חלקיק נמצא במצב היסוד בתוך בור פוטנציאל אינסופי. הראו כי יחס אי הודאות מתקיים עבור מצב זה. עבור Δx ניתן לקחת את רוחב הבור (או יותר מדויק רוחב הבור חלקי 4π). התנע של החלקיק אמנם ידוע מתוך האנרגיה אבל הכיוון שלו אינו ידוע, התנע יכול להיות חיובי או שלילי ולכן אי הודאות בתנע היא $2p$.

(5) הסתברות למצא אלקטרון בבור

אלקטרון נמצא בקופסה סגורה וקשיחה ברוחב 1.00nm . מה ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק 0.10nm ממרכז הקופסה, מכל צד, עבור המצב:

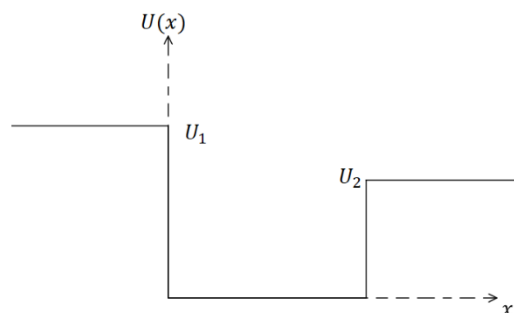
- $n = 1$
- $n = 4$
- $n = 20$
- השוו למקרה הקלאסי.

(6) בור אינסופי מוזז

מצאו את פונקציות הגל עבור בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l הנמצא מ- $x = -\frac{l}{2}$ ועד $x = \frac{l}{2}$ (במקום מ-0 עד l). האם רמות האנרגיה משתנות?

(7) בור סופי עם קירות שונים

חלקיק נמצא תחת הפוטנציאל הנתון באיור. שרטטו את פונקציית הגל עבור שלושת המצבים הבאים:
 א. החלקיק במצב המעורר הראשון ו- $E < U_2$.
 ב. $U_2 < E < U_1$.
 ג. $U_1 < E$.



(8) זרם פרוטונים עובר מחסום

זרם של 1.2mA המכיל פרוטונים באנרגיה 1.8MeV נתקל במחסום פוטנציאל בגובה 2.0MeV וברוחב $5.0 \cdot 10^{-14}\text{m}$. מהו הזרם המועבר?

תשובות סופיות:

(1) א. $4.86 \cdot 10^{-18}\%$ ב. 3.67%

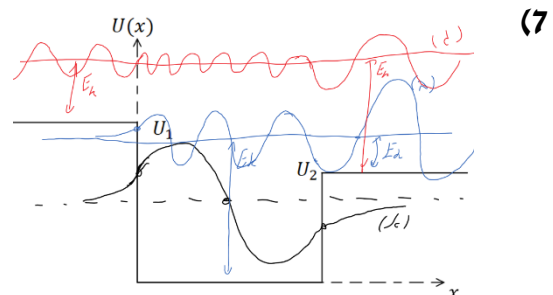
(2) א. $p = 3.3 \cdot 10^{-24}\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}\text{m}$ ג. $3.64 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ד. 38eV

(3) $1.2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(4) הוכחה.

(5) א. 0.387 ב. 0.153 ג. 0.2 ד. 0.2

(6) $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi nx}{l} + \frac{\pi n}{2}\right)$, לא משתנות.



(8) 96nA

אוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = 8\sqrt{3}(\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad \text{פונקציות הגל:}$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad \text{כאשר } n=1,2,3,\dots$$

$$(n=0,1,2,\dots \text{ כאשר } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \text{ או})$$

פתרון כללי ל

שאלות:

- (1) **דוגמה – אלקטרון בתנודה הרמונית פולט פוטון**
אלקטרון הנמצא באוסילטור הרמוני קוונטי פולט פוטון באורך גל של 400nm כאשר הוא יורד רמת אנרגיה אחת.
א. האם ניתן לדעת באיזה רמת אנרגיה היה האלקטרון?
ב. מהו "קבוע הקפיץ"?

- (2) **דוגמה – איזה פונקציית הסתברות מתאימה**
איזו פונקציית הסתברות מתאימה לחלקיק הנמצא תחת פוטנציאל של אוסילטור קוונטי עם אנרגיה: $E = \frac{7}{2} \hbar \omega$



תשובות סופיות:

- (1) א. לא. ב. $0.02 \frac{\text{N}}{\text{m}}$
- (2) 4.

תרגילים נוספים:

שאלות:

- (1) **פונקציית חומר מול פונקציות גל אחרות**
השוו בין פונקציית הגל של החומר ψ לבין:
א. פונקציית הגל של מיתר.
ב. פונקציית גל של גל אלקטרומגנטי.
- (2) **מודל בוהר וקוונטים**
מה ההבדל בין המודל האטומי של בוהר למכניקת הקוונטים?
רמז: עיקרון אי הוודאות.
- (3) **האם אפשר לאזן מחט**
האם אפשר לאזן מחט כך שהיא תעמוד על החוד שלה באופן מוחלט?
- (4) **ניוטון וקוונטים**
באיזה אופן התורה של ניוטון שונה מתורת הקוונטים?
- (5) **מיקום מדויק**
האם עקרון אי הודאות מגביל את הדיוק שבו ניתן למדוד את המיקום של גוף?
- (6) **למי יש יותר סיכוי לעבור מחסום**
אטום מימן ואטום הליום בעלי אנרגיה זהה מתקרבים למחסום פוטנציאל ברוחב סופי עם אנרגיה פוטנציאלית גבוהה מהאנרגיה שלהם.
למי סיכוי גדול יותר לעבור את המחסום?
- (7) **חיים של בוזון Z^0**
בוזונים הם שם לקבוצת חלקיקים נשאי כוח (עם ספין שלם). הבוזון Z^0 קשור ל"כוח החלש" (כוח שפועל בתוך הגרעין) ודועך מאוד מהר. האנרגיה הממוצעת שלו היא 91.9 GeV והרוחב במדידת האנרגיה הוא 2.5 GeV .
מהו זמן החיים המוערך של הבוזון Z^0 ?

(8) כדור מקפץ

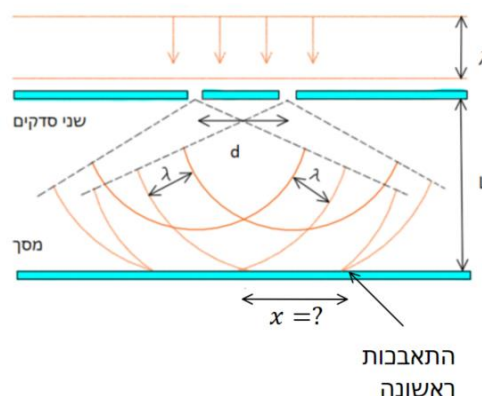
כדור קטן במסה 10^{-6}kg משוחרר ממנוחה בגובה 2m מעל הרצפה. הכדור פוגע ברצפה וקופץ חזרה. לאחר כל פגיעה ברצפה הכדור מגיע חזרה ל-60% מהגובה הקודם בגלל איבוד אנרגיה בהתנגשות עם הרצפה. כמה פעמים צריך הכדור לפגוע ברצפה עד שאי הודאות במהירות שלו תהיה משמעותית (כלומר בסדר גודל של המהירות עצמה). הניחו שאי הודאות במדידת המיקום היא בסדר גודל של הגובה הנמדד.

(9) פונקציית גל נתונה

- נתונה פונקציית הגל הבאה: $\psi(x) = b^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{b} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-(x/b)^2/2}$, כאשר $nmb = 0.5$.
- בדקו כי פונקציית הגל מנורמלת.
 - מהו המיקום המסתבר ביותר בו נמצא החלקיק בתחום $x > 0$?
 - מה ההסתברות למצא את החלקיק בין $x = 0$ ל- $x = 0.50\text{nm}$?

(10) נויטרונים בניסוי שני סדקים

- עורכים את ניסוי שני הסדקים עם נויטרונים בעלי אנרגיה של 0.0040eV . המרחק בין הסדקים הוא $d = 0.70\text{mm}$ והמרחק למסך הוא $L = 1.0\text{m}$. מהו המרחק מהמרכז בו תופיע ההתאבכות הראשונה? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$.



תשובות סופיות:

- (1) א. חומר : פונקציה סקלרית, מתארת הסתברות וללא תווך.
מיתר : פונקציה סקלרית, מתארת תנודה, דרוש תווך.
ב. א"מ : פונקציה וקטורית, מתארת הסתברות ואת האמפליטודה של השדה החשמלי והמגנטי, ללא תווך.
- (2) ראו סרטון.
- (3) לא.
- (4) בתורה של ניוטון ניתן לחשב את המיקום והתנע באופן מדויק בזמנית, כתוצאה מכך ניתן תיאורטית לצפות בדיוק את ההתנהגות של מערכת בעתיד. לפי תורת הקוונטים יש אי ודואות במדידות ולכן ניתן לצפות רק הסתברויות להתנהגות המערכת בעתיד.
- (5) לא.
- (6) מימן.
- (7) $1.3 \cdot 10^{-25} \text{ sec}$
- (8) .70
- (9) א. הוכחה. ב. 0.35 nm ג. 63%
- (10) $6.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

מבוא לגלים

פרק 13 - תורת הקוונטים חלק 2- כנראה שאין לכם צורך בפרק הזה לפי הסילבוס

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 150

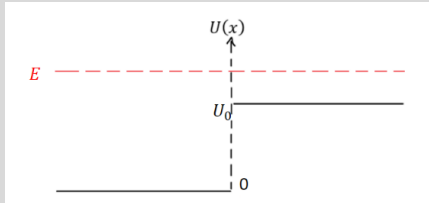
מהירות הפאזה, יחס דיספרסיה ומהירות החבורה

סיכום כללי

שם	נוסחה	הערות
מהירות הפאזה	$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$	המהירות של אורך גל מסוים
מהירות החבורה	$v_g = \frac{d\omega}{dk}$	מהירות של כל הפונקציה או סכום כל הגלים (חבילת הגלים)
יחס הדיספרסיה	הקשר בין ω ל- k	

פיזור

סיכום כללי

שם	נוסחה	הערות
מקדם ההעברה	$T = \frac{ C ^2}{ A ^2}$	ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום במקרה שבו k_2 בתחום אליו החלקיק עובר שונה מ- k_1 בתחום ממנו החלקיק הגיע $T = \frac{ C ^2 k_2}{ A ^2 k_1}$
מקדם החזרה	$R = \frac{ B ^2}{ A ^2}$	ההסתברות שהחלקיק יוחזר מהמחסום
עבור מדרגת פוטנציאל וכאשר $E > U_0$	$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} ; R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$	

- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

שאלות

(1) פיזור מפוטנציאל מלבני

חלקיק חופשי בעל מסה m נע משמאל לימין ונתקל בפוטנציאל מלבני בגובה U_0 וברוחב L המתחיל ב- $x = 0$. אנרגיית החלקיק היא E וקטנה מ- U_0 . א. הראו כי הפתרון הכללי לפונקציית הגל הוא מצורה:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & 0 < x < L \\ Fe^{ikx} & L < x \end{cases}$$

$$\text{כאשר: } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ ו- } \alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

ב. רשמו את תנאי השפה והראו כי הקשר בין הקבועים נתון לפי המשוואות:

$$A + B = C + D$$

$$ik(A - B) = \alpha(C - D)$$

$$Ce^{\alpha L} + De^{-\alpha L} = Fe^{ikL}$$

$$\alpha(Ce^{\alpha L} - De^{-\alpha L}) = ikFe^{ikL}$$

ג. פתרו את המשוואות (רצוי באמצעות מחשב) והראו כי:

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(\alpha L) + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \sinh^2(\alpha L)}$$

$$\text{כאשר: } \gamma = \frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}$$

ד. הראו כי במקרה של $e^{-\alpha L} \ll 1$ מקדם ההעברה הוא בקירוב:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right) e^{-2\alpha L}$$

ה. כעת הניחו ש- $E > U_0$, מצאו את מקדם ההעברה במקרה זה. הדרכה: חזרו על השלבים שבסעיפים א - ג עבור מקרה זה.

$$\text{רמז: } \cosh(ik) = \cos(k) \text{ ו- } \sinh(ik) = i \sin(k)$$

(2) חלקיק עובר מעל בור פוטנציאל סופי

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$

חלקיק בעל מסה m נע משמאל בהשפעת הפוטנציאל: $0 < x < L$

כאשר אנרגיית החלקיק E נתונה וגדולה מ- U_0 .

א. מצאו את מקדם ההעברה.

ב. עבור אילו מצבים הבור "שקוף" לתנועת החלקיק? האם המצבים מוכרים לכם?

(3) מקדם החזרה בפגיעת אלקטרון בשפת מתכת

במקרה של פליטת אלקטרונים ממתכת, חלק מהאלקטרונים עם אנרגיה מספיקה ליציאה מהמתכת עדיין יכולים להיות מוחזרים משפת המתכת.

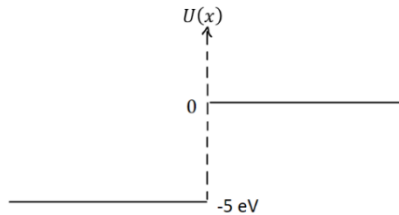
במודל חד מימדי נניח כי פוטנציאל האלקטרון בתוך המתכת ($x < 0$) שווה ל-

-5eV והפוטנציאל הוא אפס מחוץ למתכת ($x > 0$).

מהו מקדם ההחזרה של האלקטרון משפת המתכת אם אנרגיית האלקטרון היא

א. 90eV

ב. 0.4eV


תשובות סופיות

(1) א-ד. שאלות הוכחה. ה. $T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{1}{\cos^2(k_2 L) + \left(\frac{\tilde{\gamma}}{2} \right)^2 \sin^2(k_2 L)}$

כאשר: $\tilde{\gamma} = \frac{k_2}{k} + \frac{k}{k_2}$ ו- $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - v_0)}}{\hbar}$

(2) א. $T = \frac{1}{\cos^2(k_2 L) + \left(\frac{\tilde{\gamma}}{2} \right)^2 \sin^2(k_2 L)}$ כאשר: $\tilde{\gamma} = \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}$ ו- $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

ב. $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ כן.

(3) א. $1.83 \cdot 10^{-4}$ ב. 0.328

פונקציית דלתא של דיראק

סיכום כללי

הגדרת הפונקציה :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

או

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

או

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$$

כאשר a הולך לאפס.

תכונה :

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא :

עבור :

$$V(x) = -a\delta(x)$$

כאשר $E < 0$:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

$$E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2}$$

מקבלים מצב אחד בלבד, לא משנה מה הערך של a (גודל הבור).

כאשר $E > 0$ וחלקיק שמגיע משמאל :

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \beta^2}$$

$$\beta = \frac{am}{\hbar^2 k}$$

עבור :

$$V(x) = +a\delta(x)$$

E חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

שאלות

1) פוטנציאל דלתא בתוך בור אינסופי**

אלקטרון נמצא בבור פוטנציאל ברמה השנייה. הבור הוא אינסופי אך במרכז יש פוטנציאל דלתא, כלומר :

$$V(x) = \infty, |x| > \frac{l}{2}$$

$$V(x) = a\delta(x), |x| < l/2$$

א. מצאו את הפתרונות עבור משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן. הפרידו בין הפתרונות הסימטריים לאנטי סימטריים ומצאו את האנרגיות המתאימות לכל פתרון. עבור הפתרונות הסימטריים הראו רק כי המשוואה ממנה ניתן לקבל את רמות האנרגיה היא מהצורה: $\tan\left(k \frac{l}{2}\right) = -\frac{\hbar^2 k}{am}$ וציירו פתרון גרפי כללי למשוואה. בשני המקרים אין צורך לנרמל את הפתרונות.

ב. דונו במקרה ש- $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$ ובמקרה ש- $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$.

ג. האלקטרון יורד לרמת היסוד ופולט פוטון, מהי האנרגיה של הפוטון הנפלט ב- eV אם: $l = 2.7nm$ ו- $a = 2 \cdot 10^{-27} j \cdot m$.

(2) קרן אלקטרוניים עוברת שתי דלתות

קרן אלקטרוניים מפוזרת על ידי מחסום פוטנציאל המורכב שתי פונקציות דלתא זהות במרחק l . כלומר: $V(x) = a\delta(x) + a\delta(x-l)$. חשבו בקירוב את האנרגיה הכי נמוכה של אלקטרון עברה אין החזרה של הקרן (כל האלקטרוניים עוברים דרך המחסום).

$$a = 1.9 \cdot 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{m}, l = 4.2 \text{ nm}$$

(3) קרן עוברת דרך שתי דלתות ומדרגה

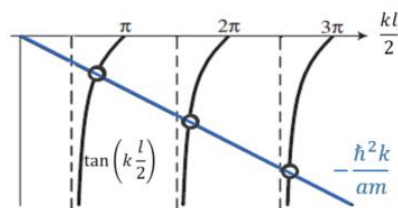
קרן אלקטרוניים מגיעה משמאל לפוטנציאל הבא:

$$V(x) = U(x) + a\delta(x) + a\delta(x-l)$$

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < l \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצאו את רמת האנרגיה הרביעית עברה אין החזרה של הקרן, יש להשתמש בפתרון גרפי ולבטא ב- eV .

$$\text{נתון: } a = 0.63 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}, U_0 = 4.7 \text{ eV}, l = 0.2 \text{ nm}$$

תשובות סופיות**(1) א. פתרון גרפי למצבים הסימטריים:**

$$\text{האנרגיות של המצבים האנטי סימטריים: } n = 2, 4, 6, \dots \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$$

ב. האנרגיות של הפונקציות האנטי סימטריות לא מושפעות מ- a עבור $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$. האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות לאנרגיות שלהם בבור אינסופי (ללא דלתא). עבור $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות

$$\text{לאנרגיות של בור אינסופי ברוחב } \frac{l}{2} \quad \text{ג. } 0.3 \text{ eV}$$

$$0.02 \text{ eV} \quad (2)$$

$$125 \text{ eV} \quad (3)$$

פוטנציאלים תלת מימדיים

סיכום כללי

פונקציית הגל והאנרגיות של תיבה תלת מימדית:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

האנרגיה של אוסילטור תלת מימדי:

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z$$

ניוון - כאשר לכמה מצבים (פונקציות גל) שונים יש את אותה האנרגיה. אי אפשר לדעת את המצב של החלקיק מהאנרגיה בלבד.

ניוון היא תופעה שלא מתרחשת במימד אחד

דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

שאלות

(1) אוסילטור ב-Z בור ב-X ו-Y

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת הפוטנציאל הבא :

$$V(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

כאשר :

$$V_1(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad V_2(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < a \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad V_3(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < b \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

כמו כן נתון כי :

$$\hbar \omega = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$b = 2a$$

- א. מהי האנרגיה של הרמה המעורערת החמישית?
- ב. מהי דרגת הניוון של רמה זו?
- ג. מהי פונקציית הגל של חלקיק שנמצא ברמת אנרגיה זו?

תשובות סופיות

(1) א. $E = 2.75 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ רמה 5. ב. 2

ג.
$$\psi(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\frac{z^2 \pi^2 \hbar^2}{4L^2}} \left[\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2L}y\right) \left(1 - \left(\frac{\pi z}{L}\right)^2\right) + \beta \sin\left(\frac{3\pi}{2L}y\right) \right]$$

פונקציית הגל כתלות בזמן

סיכום כללי

ניתן לקבל את פונקציית הגל הכללית, הפותרת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן על ידי קומבינציה לינארית של פונקציות הגל המתקבלות במצבים עמידים (מתוך פתרון משוואת שרדינגר הבלתי תלוי בזמן).

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

כאשר - הן פתרונות המצבים העמידים ו - היא האנרגיה של כל מצב.

את המקדמים ניתן למצוא לפי (בהנחה שהפונקציות שמתקבלות מהמצב העמיד הן אורתונורמליות).

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

ו - $|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

יוצא גם שאם $\Psi(x, 0)$ מנורמלת אז $\Psi(x, t)$ מנורמלת לכל t .

שאלות

(1) רשמו פונקציית גל

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת פוטנציאל מהצורה $\frac{1}{2} kx^2$.

ב- $t = 0$ לחלקי הסתברות של 75% להיות במצב ייסוד ו- 25% להיות במצב המעורר הראשון. רשמו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן. פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון הן:

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

כאשר $b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ והאנרגיות הן:

$$E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

(2) מסת חלקיק מפונקציית הגל

נתונה פונקציית גל (חד מימדית) של חלקיק חופשי

$$\Psi(x, t) = A e^{i\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

כאשר A , L , τ קבועים חיוביים נתונים. מהי מסת החלקיק?

תשובות סופיות

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_1(x) e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \frac{1}{2} \psi_2(x) e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \quad (1)$$

$$m = \frac{\hbar \tau}{2L^2} \quad (2)$$

אופרטורים

סיכום כללי

אופרטור - לכל גודל פיזיקאלי ניתן לשייך אופרטור. כאשר שמים את האופרטור בין ψ ל- ψ^* ועושים אינטגרל על כל המרחב (סנוויץ) הוא נותן את ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי אליו הוא שייך.

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi dx$$

אופרטור המיקום: $\hat{x} = x$

אופרטור התנע בממד אחד: $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$

כל אופרטור אחר יהיה פונקציה של אופרטור המיקום והתנע:

$$Q(x, p, t) \rightarrow \hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} t\right)$$

כאשר מכפילים אופרטור בפונקציה אומרים שהאופרטור "פועל" על הפונקציה. אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$, אז ψ היא פונקציה עצמית של האופרטור ו- λ הוא ערך עצמי (ע"ע) של האופרטור.

הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הן: $\psi(x) = Ae^{ikx}$ והערכים העצמיים הם: $\hbar k$.

הפונקציות העצמיות של אופרטור המיקום הן: $\delta(x - a)$ והערכים העצמיים הם a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אפשר לכתוב את משוואת שרידנגר הבלתי תלויה בזמן באמצעות ההמילטוניאן. הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן הן הפתרונות של משוואת שרידנגר הבלתי תלויה בזמן והאנרגיות הן הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.

שאלות

(1) המילטוניאן ומדידת אנרגיה בבור פוטנציאל

- חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל ברוחב $0 < x < l$.
 א. מצאו את המצבים העצמיים ואת הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.
 כעת נניח כי פונקציית הגל של החלקיק ברגע מסוים היא:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(x)$$

- כאשר $\psi_1(x)$ ו- $\psi_2(x)$ הן פונקציות הגל של האנרגיות E_1 ו- E_2 בבור בהתאמה.
 ב. האם פונקציה זו היא פונקציה עצמית של ההמילטוניאן?
 ג. מהי האנרגיה הממוצעת של החלקיק במצב הנ"ל?
 האם ניתן למצא את החלקיק באנרגיה זו?

(2) חלקיק בצד ימין של בור פוטנציאל

- חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l .
 נתון כי בזמן $t = 0$ לחלקיק הסתברות שווה להיות בחצי הימני של הבור.
 א. מהי פונקציית הגל של החלקיק ב- $t = 0$?
 ב. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן.
 שערך ללא חישוב האם החלקיק יישאר בחצי הימני של הבור?
 ג. מהי ההסתברות שהחלקיק יהיה במצב היסוד ב- $t = 2\text{sec}$?
 ד. ב- $t = 3\text{sec}$ נעשתה מדידה והתגלה שהחלקיק אכן במצב היסוד.
 מהי פונקציית הגל של החלקיק מרגע זה והילך, ניתן לקבוע רגע זה כ- $t = 0$ חדש.
 ה. מהו ערך התוחלת של התנע של החלקיק מסעיף ד'?

(3) מוסיפים פאזות למקדמים

- חלקיק נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l .
 א. מצאו את ההסתברות כתלות בזמן של החלקיק להיות בחצי השמאלי של הבור אם ידוע שהוא נמצא במצב עמיד כלשהו (או מצב עצמי של ההמילטוניאן).
 כעת נתון שפונקציית הגל של החלקיק היא:

$$\Psi(x, t) = c_1\psi_1(x)e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}} + c_2\psi_2(x)e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}$$

 כאשר $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ψ_1 ו- ψ_2 הן פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון בבור, E_1 , E_2 הן האנרגיות של אותם מצבים.
 ב. הראו כי $\Psi(x, t)$ מנורמלת.
 ג. מהי ההסתברות למצא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור כתלות בזמן?
 ד. חזרו על סעיף ג כאשר $c_1 = \frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}}$.

(4) אופרטור האנרגיה הקינטית

אופרטור האנרגיה הקינטית הוא :

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

הראו כי הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע $\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ikx}$ הן גם פונקציות עצמיות של אופרטור האנרגיה הקינטית ומצאו את הערכים העצמיים של אופרטור זה.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \langle E \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2}, \text{ ג. לא, ב. לא. } \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad \text{א.}$$

$$\psi(x, t) = \sum \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

$$(2) \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad \text{א. } \psi(x, t=0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{l}} & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{ב.}$$

לא יישאר, $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi n} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - (-1)^n \right]$$

$$(3) \quad \psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}, E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad \text{ד. } \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \quad \text{ה. אפס.}$$

$$(3) \quad \text{א. 0.5} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \frac{4}{3\pi} \quad \text{ג.}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, P\left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t - \Delta\varphi\right) \quad \text{ד.}$$

$$(4) \quad \lambda = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

אופרטורים הרמיטיים

סיכום כללי

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי .
כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.
הגדרה :

$$(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$$

לכל הפונקציות במרחב.

או :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$$

תכונות של אופרטור הרמיטי :

1. ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.*

* אם ניתן לתאר את כל הפונקציות במרחב באמצעות קומבינציה לינארית של סט מסוים של פונקציות אז אותו סט נקרא סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל והסבר מסכם על צורת העבודה בתורת הקוונטים

סיכום כללי

הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם של פונקציות (או בסיס). אפשר לכתוב כל פונקציית גל כקומבינציה לינארית של הבסיס העצמי של כל אופרטור.

כלומר, אם ϕ_n ו- λ_n הן הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים של האופרטור $\hat{A}$

אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה: $\omega(x, t) = \sum \alpha_n \phi_n$.

$|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n .

הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

בשביל למצא את α_n :

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x, t) dx$$

במקרה הרציף:

$$\lambda_n = \lambda(k)$$

$$\phi_n \rightarrow \phi(k)$$

$$\sum \alpha_n \phi_n \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) dk$$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) dk$$

$$|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k, t)|^2 dk$$

שאלות

(1) פונקציה משולשת

נתון חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב L . כזכור, המצבים העצמיים עבור

בור שכזה נתונים ע"י הפונקציות: $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ והאנרגיות העצמיות

הן: $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$. נתון שפונקציית הגל ההתחלתית בה הוכנה המערכת היא

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{A}{L} x & \text{for } 0 < x < \frac{L}{2} \\ A(1 - \frac{x}{L}) & \text{for } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

פונקציה משולשת מהצורה:

א. מצאוי את A .

ב. מהי ההסתברות שבמידת אנרגיית החלקיק ימדדו הערכים: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ?

ג. חשבי את ערך התוחלת של אנרגיית החלקיק $\langle E \rangle$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ייתכן ותזדקקי לטור הבא:

(2) פונקציית גאוסיאן ומעבר לתדר

פונקציית הגל (מנורמלת) של חלקיק חופשי ב- $t = 0$ נתונה לפי:

$$\Psi(x, t = 0) = (2\pi a^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}}$$

א. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק במרחב התדר: $\Psi(k, t = 0)$.

ב. מצאו את אי הודאות של מספר הגל של החלקיק Δk .

השתמשו ב:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - bx - c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } A = \sqrt{\frac{12}{11L}}$$

$$\text{ב. } P(E_1) = 0.09, P(E_3) = 1.1 \cdot 10^{-3}, P(E_5) = 1.4 \cdot 10^{-4}, P(E_2) = P(E_4) = 0$$

$$\text{ג. } \langle E \rangle = \frac{6\hbar^2}{11mL^2}$$

$$(2) \text{ א. } \sqrt{2} (2\pi\varphi^2)^{\frac{1}{4}} e^{-ikx_0} e^{-a^2 k^2} \quad \text{ב. } \sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}$$

יחס החילוף

סיכום כללי

יחס החילוף (או הקומוטטור) מוגדר להיות :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו.

אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס ואם הסדר כן משנה אז הפעלה של יחס החילוף תיתן ערך מורכב כלשהו לאופרטורים שיחס החילוף שלהם מתאפס אנחנו קוראים חילופיים. יחס החילוף של המיקום עם התנע :

$$\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle = i\hbar$$

אם האופרטורים $\hat{A}$ ו- $\hat{B}$ מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם ולהפך (אם הם לא מתחלפים אז לא ניתן למצא סט של פונקציות עצמיות משותפות).

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי. אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות בניהם לפי :

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

שאלות

1 פירוק יחס חילוף מורכב

א. הראו כי : $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

ב. הראו כי : $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

ג. מצאו את $[\hat{x}, \hat{p}^2]$ ובדקו האם אופרטור המיקום מתחלף עם ההמילטוניאן של חלקיק חופשי במימד אחד.

2 הוכחת זהות

הוכיחו כי : $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$.

תשובות סופיות

1 א-ב. הוכחה. ג. $2i\hbar\hat{p}$, לא מתחלף.

2 הוכחה.

משפט ארנפס

סיכום כללי

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

שאלות

1) הקשרים הקלאסיים

- א. הראו באמצעות משפט ארנפס כי: $\langle p \rangle = \frac{d}{dt} \langle x \rangle$.
- ב. הראו כי: $[\hat{p}, U(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial U}{\partial x}$.
- ג. הראו באמצעות משפט ארנפס כי: $\frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

תרגילים נוספים

שאלות

(1) התפתחות בזמן בבור אינסופי

נתון חלקיק בעל מסה m אשר כלוא בבור פוטנציאל אינסופי חד-מימדי בעל

אורך L אשר מרכזו ב- $x = \frac{L}{2}$. פונקציית הגל של החלקיק ברגע $t = 0$ הינה

סופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של בור פוטנציאל אינסופי :

$$\psi(x, t=0) = A[\phi_1(x) + \phi_2(x)]$$

כאשר ϕ_1 הוא מצב היסוד (בעל אנרגיה E_1) ו- ϕ_2 הוא המצב המעורר הראשון

(בעל אנרגיה E_2).

שני המצבים בעלי הסתברות זהה.

א. מצאו את הנרמול של פונקציית הגל.

ב. מצאו את $\psi(x, t)$. ודאו כי $\psi(x, t)$ מקיימת את משוואת שרדינגר.

ג. מצאו את $|\psi(x, t)|^2$, בטאו את פונקציית צפיפות ההסתברות כפונקציה סינוסואידלית בזמן.

ד. חשבו את ערך התצפית של המקום. שימו לב כי ערך התצפית עושה אוסילציות בזמן. מהי תדירות האוסילציות?

ה. חשבו את ערך התצפית של התנע לפי הגדרה. הראו כי מתקיים :

$$\left(\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} (\langle x \rangle) \right)$$

ו. חשבו את ערך התצפית של האנרגיה של החלקיק לפי הגדרה. הסבירו את תשובתכם.

ז. הניחו כי אי הודאות באנרגיה היא : $\Delta E = (E_2 - E_1)$ והשתמשו בעיקרון

אי הודאות של הייזנברג על מנת למצוא את Δt .

השוו לזמן המחזור של האוסילציות שמצאתם בסעיף ד' והסבירו.

תשובות סופיות

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{א. } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ב. } \psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + \phi_2 e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} \right) \\
 & \text{ג. } |\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} \left(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + 2\phi_1 + \phi_2 \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \right) \\
 & \text{ד. } \langle x \rangle: \frac{L}{2} - \frac{16}{9} \frac{L}{\pi^2} \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \quad \text{ה. } \langle P \rangle = \frac{8\hbar}{3L} \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \\
 & \quad \omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = 2\pi F
 \end{aligned}$$

ו. $\langle E \rangle = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} E_2$, חישוב התוחלת של האנרגיה הוא ההסתברות להיות בכל

מצב עצמי של האנרגיה כפול האנרגיה של המצב.

$$\Delta t \simeq \frac{\hbar}{2(E_2 - E_1)} \quad \text{ז.}$$

מבוא לגלים

פרק 14 - המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 172

פתרון עבור אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב- r :

משוואה ל- $\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

משוואה ל- $\phi(\phi)$:

$$\frac{\partial^2 \phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2 \phi(\phi)$$

פתרון לחלק הזוויתי:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \theta(\theta) \phi(\phi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m > 0 \\ 1 & m \geq 0 \end{cases}$$

$l \geq 0$ ו- $|m| \leq l$ שלם.

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2-1)^l$$

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

$$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$$

$$\begin{aligned}
 P_1^1 &= \sin \theta & P_3^3 &= 15 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \\
 P_1^0 &= \cos \theta & P_3^2 &= 15 \sin^2 \theta \cos \theta \\
 P_2^2 &= 3 \sin^2 \theta & P_3^1 &= \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \\
 P_2^1 &= 3 \sin \theta \cos \theta & P_3^0 &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\
 P_2^0 &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)
 \end{aligned}$$

אורתוגונליות :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* [Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi)] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) &= l(l+1) \\
 R(r) &= \frac{u(r)}{r} \\
 -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) &= Eu(r)
 \end{aligned}$$

פתרון עבור אטום המימן :

מתוך פתרון המשוואה תנאי שמקוונטט את האנרגיה :

$$\begin{aligned}
 E_n &= -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \\
 E_1 &= -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV} \\
 n &= 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

הפתרון לפונקציה תלוי בקבועים n ו- l :

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na}\right)$$

רדיוס בוהר :

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} m$$

$$L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x)$$

$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (e^{-x} x^q)$$

$$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי :

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$0 \leq l \leq n-1$$

l שלם ומקיים :

$$-l \leq m \leq l$$

m שלם ומקיים :

אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$

תנע זוויתי:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$$

נגדיר אופרטורים: L^2, L_z, L_x, L_y

$$L^2 Y_l^m = l(l+1) \hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

גודל התנ"ז יכול להיות גם אפס וזה בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L_z , משם אפשר למצא את $\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$L_z Y_l^m = m \hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

רמות אנרגיה ניוון וספקטרום הפליטה:

צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר (Selection Rules):

$$1. \quad n_i > n_f$$

$$2. \quad \Delta l = l_f - l_i = \pm 1$$

$$3. \quad \Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$$

שאלות:

(1) הסתברות להיות רחוק מרדיוס בוהר

- א. חשבו את ההסתברות של אלקטרון במצב היסוד באטום מימן, להימצא במרחק שגדול מרדיוס בוהר מהגרעין.
- ב. מצאו את הרדיוס הממוצע בו נמצא האלקטרון במצב היסוד.

(2) כוח ממוצע

פונקציית הגל של המצב: $n = 2, l = 1, m = 0$ היא: $\psi_{210} = \frac{r \cos \theta}{\sqrt{32\pi a^5}} e^{-\frac{r}{2a}}$. מצאו את גודל הכוח החשמלי הממוצע שפועל על האלקטרון.

נוסחאות עזר:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \frac{16}{15}$$

(3) הראו כי התנז לא בכיוון Z

הראו שהתנע הזוויתי המסלולי של האלקטרון באטום המימן לא יכול להיות מקביל לציר Z.

(4) גז מעורר

נתון גז של אטומי מימן שבכל אחד מהם האלקטרון נמצא ברמה התחלתית $(n=4, l=3)$.

נתון שאין אינטראקציה בין האטומים, טמפרטורת הגז נשארת קבועה כל הזמן ולא קיים שדה מגנטי חיצוני.

כמה קווי פליטה שונים (אורכי גל שונים) נראה בספקטרום הפליטה של הגז (ספקטרום הפליטה מתקבל כאשר האלקטרונים יורדים לרמות נמוכות יותר)? רשמו את מצבי האנרגיה הנמוכים ביותר שבהם יכולים להימצא האלקטרונים לאחר זמן רב (השתמשו במספרים הקוונטים (n, l) כדי לאפיין את מצבי האנרגיה).

(5) צבר אטומי מימן במצב 2 בשטרן גרלך

- צבר אטומי מימן נמצא במצב $n = 2$ (ועם תנע זוויתי כלשהו).
 בכל סעיפי השאלה יש להתחשב גם בספין.
 א. כמה כתמים יהיו על המסך עבור הצבר בניסוי שטרן גרלך?
 ב. ציינו איזה מצב קוונטי גרם לכל כתם על המסך.
 אורך המגנט בניסוי הוא L והמרחק מסוף המגנט ועד המסך הוא $10L$.
 השדה המגנטי הוא $B(z) = B_0 \frac{z}{L}$ ומהירות האטומים היא v .
 ג. מה יהיה המרחק בין שני הכתמים הנוצרים מהמצבים בהם האלקטרון נמצא ברמה $2s$?
 ד. כמה רמות אנרגיה שונות קיימות לצבר (תחת שדה מגנטי)?
 כמה אורכי גל שונים יכולים להיפלט מהצבר?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.677 ב. $1.5a$
 (2) $\frac{ke^2}{12a^3}$
 (3) הוכחה.
 (4) 5 קווים, $1s$ ו- $2s$.
 (5) א. ישנם 5 אופציות שונות למומנט המגנטי ולכן נקבל 5 כתמים.
 ב. הכתם הכי נמוך שייך ל- $m+2ms=2$ וככל שהערך יורד הכתם יהיה יותר גבוה.
 ג. $21 \frac{\mu_B B_0 L}{mv^2}$
 ד. לצבר 5 רמות אנרגיה שונות עבור הערכים השונים של המומנט המגנטי.
 7 אורכי גל שונים.

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

סיכום כללי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-\mu_B}{\hbar} \vec{L}$$

גודל קבוע שנקרא המגנטון של בוהר:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV}/T$$

האנרגיה הפוטנציאל כתוצאה האינטראקציה של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:

$$U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$$

כאשר m הוא המספר הקוונטי של L_z .

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן:

$$\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$$

$$\Delta m = \pm 1, 0$$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.

שאלות:

(1) פוטון נפלט מאטום מימן בשדה מגנטי

אלקטרון נמצא ברמת האנרגיה $3p$ של אטום מימן. האטום נמצא באזור בו יש שדה מגנטי אחיד $B = 4 \cdot 10^3 [T]$. מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיכול להתקבל ממעבר של האלקטרון לרמה כלשהיא (הניחו שהאלקטרון אינו עולה רמות לפני הפליטה).

(2) פליטה מאטום בורון ורוחב פס

גז של אטומי בורון נמצא באזור בו קיים שדה מגנטי חיצוני אחיד B . בכל אחד מהאטומים מעוררים את האלקטרון שנמצא ברמה $2p$ לרמה $3s$ ומוודדים את ספקטרום הקרינה האלקטרומגנטית שמתקבל בחזרה של האלקטרון לרמה המקורית.

א. כמה קווים יתקבלו בספקטרום? הניחו שרמת האנרגיה זהות לאלו של אטום המימן.

ב. מצאו את הערך של B עבורו נוכל להבחין כי הפיצול אכן נבע מהשדה המגנטי החיצוני אם נתון שזמן החיים של הרמה המעוררת הוא $2ns$.

תשובות סופיות:

(1) $100nm$.(2) א. 3 קווים. ב. $B > 9mT$.

ספין ניסוי ושטרן גרלך:

סיכום כללי:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$\vec{L}$ תנ"ז מסילתי, נובע מהתנועה הסיבובית של החלקיק.

$\vec{S}$ תנ"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

S גדולה - גודל התנ"ז מהספין.

s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$.

עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ וכו' נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם $0, 1, 2$ נקראים **בוזונים**.

$$S_z = m_s \hbar$$

$-s < m_s < s$ בקפיצות של 1

עבור אלקטרון $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

מומנט מגנטי מהספין μ_B

פקטור g או gyromagnetic ratio

עבור אלקטרון $g = 2.0023 \dots \approx 2$

שאלות:

(1) תוחלת של S

נתונה פונקציית הגל הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\psi_{2,1,-1,\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\psi_{2,1,1,\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{2,1,1,-\frac{1}{2}}$$

א. הראו שהפונקציה מנורמלת (בהנחה ש- ψ_{n,l,m,m_s} הן אורטונורמליות).ב. מצאו את $\langle \hat{L}_z \rangle$.ג. מצאו את $\langle \hat{S}_z \rangle$.ד. מצאו את ΔS_z .

(2) שטרן גרלך עם תנז מסילתי

מה היה קורה בניסוי שטרן-גרלך אם לאלקטרון בקרן שפוגעת היה $l = 1$?

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. $\frac{\hbar}{2}$. ג. 0. ד. $\frac{\hbar}{2}$.

(2) הקרן תתפצל לחמש קרניים ונראה חמש נקודות על המסך.

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:

סיכום כללי:

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטיים: n, l, m_l, m_s .

בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l .

עיקרון האיסור של פאולי (1900-1958) Wolfgang Pauli:

שני אלקטרונים באטום לא יכולים לאכלס את אותו המצב הקוונטי.

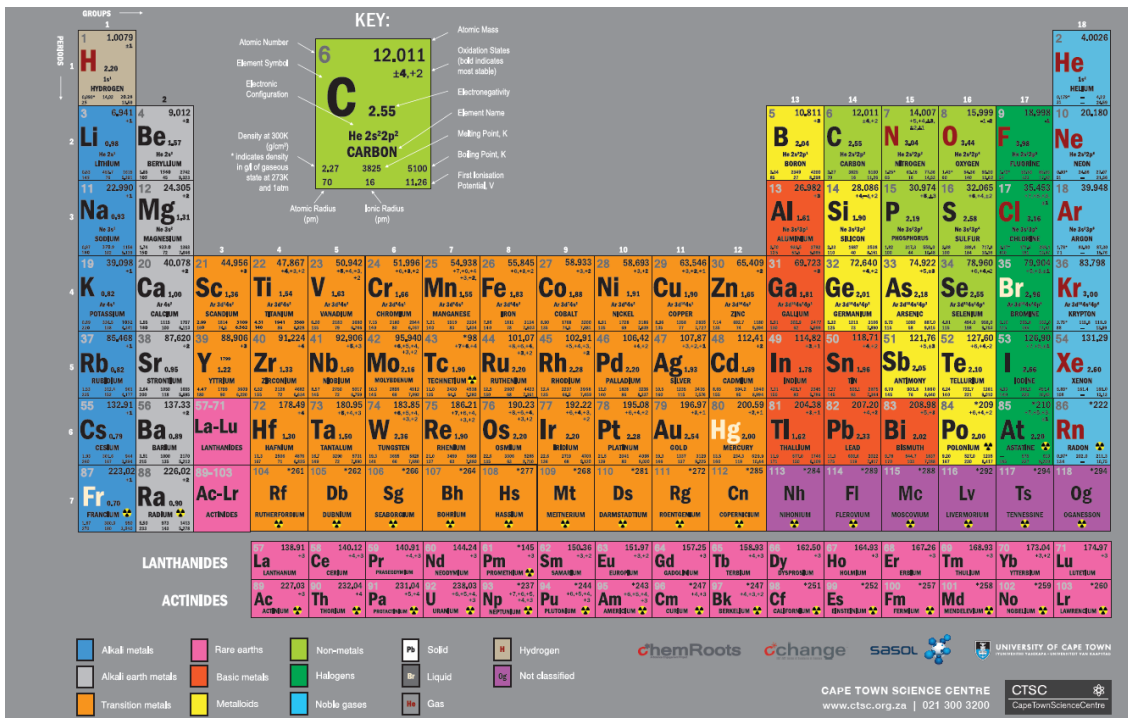
כלומר לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטיים: n, l, m_l, m_s .

ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"ז מסילת) האנרגיה גדלה.

הטבלה המחזורית:

KEY:

- Atomic Number
- Element Symbol
- Electronic Configuration
- Density at 300K (g/cm³)
- * indicates density in g/L of gaseous state at 273K and 1 atm
- Atomic Mass
- Oxidation States (bold indicates most stable)
- Electronegativity
- Element Name
- Melting Point, K
- Boiling Point, K
- First Ionization Potential, V



Legend:

- Alkali metals
- Alkali earth metals
- Transition metals
- Rare earths
- Basic metals
- Metalloids
- Noble gases
- Non-metals
- Halogens
- Noble gases
- Solid
- Liquid
- Gas
- Hydrogen
- Not classified

chemRoots cchange sasol UNIVERSITY OF CAPE TOWN
CAPE TOWN SCIENCE CENTRE www.ctsc.org.za | 021 300 3200 CTSC Cape Town Science Centre

שאלות:

(1) טיטניום

כמה אלקטרונים יש ליסוד טיטניום: $\text{Ti} (Z = 22)$ ברמה הרביעית? הניחו שהוא במצב היסוד.

(2) אטום ראשון ברמה החמישית

מהו המספר האטומי של האטום "הראשון" ברמה החמישית?

(3) קונפיגורציה של ברזל

רשמו את קונפיגורציית האלקטרונים של אטום הברזל: $\text{Fe } Z=26$ במצב היסוד. רשמו את הכתיב המלא והמקוצר.

(4) קונפיגורציות הגיוניות

אלו מהקונפיגורציות הבאות הן הגיוניות ואלו לא? (עבור אטומים ברמת היסוד)

א. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^3$

ב. $1s^2 2s^2 2p^6 2d^2$

ג. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2$

ד. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$

תשובות סופיות:

(1) שני אלקטרונים.

(2) 37.

(3) $3d^2 4s^2$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$

(4) א. לא. ב. לא. ג. לא. ד. כן.